

ELECTRICITE

TABLE DES MATIERES

ELECTRICITE.....	1
TABLE DES MATIERES	3
.CHAPITRE 1 INTRODUCTION.....	9
.1.1 LE SYSTEME INTERNATIONAL D'UNITES (SI).....	9
.1.2 MULTIPLES ET SOUS MULTIPLES DES UNITES	11
.1.3 FONCTIONS LOGARITHMES	11
.1.4 FONCTIONS EXPONENTIELLES	13
.1.5 DIFFERENTIELLES	13
.1.6 CALCUL D'INCERTITUDES	14
.1.7 EQUATIONS DIFFERENTIELLES	18
.1.8 LES NOMBRES COMPLEXES.....	18
.1.9 CARACTERES GRECS	20
.CHAPITRE 2 INTENSITE ET TENSION en COURANT CONTINU	23
.2.1 GENERALITES.....	23
.2.2 NATURE DU COURANT ELECTRIQUE.....	24
.2.3 DEFINITION D'UN COURANT ELECTRIQUE.....	25
.2.4 INTENSITE D'UN COURANT ELECTRIQUE.....	26
.2.5 TENSION ELECTRIQUE OU DIFFERENCE DE POTENTIEL.....	28
.2.6 PUISSANCE ET ENERGIE ELECTRIQUE.....	33
.2.7 EXERCICES	35
.2.8 CORRIGES DES EXERCICES.....	38
.CHAPITRE 3 CONDUCTEURS OHMIQUES.....	43
.3.1 ETUDE D'UN CONDUCTEUR OHMIQUE.....	43
.3.2 ASSOCIATION DE CONDUCTEURS OHMIQUES EN SERIE	44
.3.3 ASSOCIATION DE CONDUCTEURS OHMIQUES EN DERIVATION.....	45
.3.4 THEOREME DE KENNELY	47
.3.5 EXERCICES	49
.3.6 CORRIGES DES EXERCICES.....	53
.CHAPITRE 4 GENERATEURS ET RECEPTEURS ELECTRIQUES.....	61
.4.1 GENERATEURS.....	61
.4.2 ASSOCIATION DE GENERATEURS	65
.4.3 RECEPTEURS.....	68
.4.4 GENERALISATION DE LA LOI D'OHM AUX GENERATEURS ET RECEPTEURS.....	71

4.5	UN GENERATEUR QUI A UN ETRANGE COMPORTEMENT.....	73
4.6	UN GENERATEUR PEUT-IL SE COMPORTE EN RECEPTEUR ?.....	74
4.7	COMMENT APPLIQUER CORRECTEMENT LA LOI D’OHM GENERALISEE ?.....	76
4.8	EXERCICES	79
4.9	CORRIGES DES EXERCICES	80
.CHAPITRE 5 THEOREMES EN ELECTRODINAMIQUE		87
5.1	LOI DE POUILLET.....	87
5.2	LOIS DE KIRCHOFF	88
5.3	THEOREME DE SUPERPOSITION	90
5.4	THEOREME DE THEVENIN.....	92
5.5	THEOREME DE NORTON	97
5.6	THEOREME DE MILLMAN.....	103
5.7	RESOLUTION D’UN PROBLEME D’ELECTRODINAMIQUE.....	104
5.8	EXERCICES	105
5.9	CORRIGES DES EXERCICES.....	107
.CHAPITRE 6 DETERMINATION GRAPHIQUE DU POINT DE FONCTIONNEMENT D’UN CIRCUIT 115		
6.1	CAS DE DIPOLES LINEAIRES.....	115
6.2	CAS OU L’UN DES DIPOLES N’EST PAS LINEAIRE	116
6.3	EXERCICES	117
6.4	CORRIGES	118
.CHAPITRE 7 L’OSCILLOSCOPE.....		121
7.1	DESCRIPTION DU TUBE CATHODIQUE.....	121
7.2	VISUALISATION ET MESURE D’UNE TENSION CONTINUE.....	123
7.3	VISUALISATION D’UNE TENSION PERIODIQUE	124
7.4	UTILISATIONS D’UN OSCILLOSCOPE.....	126
.CHAPITRE 8 CONDENSATEURS.....		129
8.1	GENERALITES.....	129
8.2	ACTIVITE 1 - ETUDE EXPERIMENTALE DE LA CHARGE ET DE LA DECHARGE D’UN CONDENSATEUR.	130
8.3	INTERPRETATION.....	131
8.4	RELATION ENTRE INTENSITE DU COURANT ET CHARGE DU CONDENSATEUR. 133	
8.5	ACTIVITE 2 - CAPACITE D’UN CONDENSATEUR.....	135
8.6	TENSION DE SERVICE D’UN CONDENSATEUR.....	137
8.7	ACTIVITE 3 - ENERGIE EMMAGASINEE PAR UN CONDENSATEUR.	137
8.8	ASSOCIATION DE CONDENSATEURS EN SERIE.....	138
8.9	ASSOCIATION DE CONDENSATEURS EN DERIVATION.....	139

.8.10	EXERCICES	140
.8.11	CORRIGES DES EXERCICES	142
.CHAPITRE 9	LES BOBINES	147
.9.1	CONSTITUTION.....	147
.9.2	REPRESENTATION SYMBOLIQUE.....	147
.9.3	ACTIVITES : UNE BOBINE PEUT- ELLE SE COMPORTER COMME UNE RESISTANCE ?	147
.9.4	GRANDEURS CARACTERISTIQUES D'UNE BOBINE.....	150
.9.5	RELATION ENTRE INTENSITE ET TENSION.....	150
.9.6	ENERGIE EMMAGASINEE PAR UNE BOBINE.....	151
.9.7	EXERCICES	152
.9.8	CORRIGE DES EXERCICES	153
.CHAPITRE 10	METHODE DE FRESNEL.....	157
.10.1	FONCTION SINUSOIDALE ASSOCIEE A UN VECTEUR TOURNANT.....	157
.10.2	ASSOCIATION D'UN VECTEUR TOURNANT A UNE FONCTION SINUSOIDALE. .	157
.10.3	DIFFERENCE DE PHASE ENTRE DEUX FONCTIONS SINUSOIDALES DE MEME PERIODE.	159
.10.4	SOMME DE FONCTIONS SINUSOIDALES DE MEME PERIODE.	160
.10.5	EXERCICES	163
.10.6	CORRIGES DES EXERCICES	164
.CHAPITRE 11	ACTIVITES : ETUDE DE TENSIONS SINUSOIDALES A L'OSCILLOSCOPE	167
.11.1	MONTAGE.....	167
.11.2	OSCILLOGRAMME.....	167
.11.3	REPONSES.....	168
.CHAPITRE 12	DIPOLLES SIMPLES EN REGIME SINUSOIDAL.....	171
.12.1	CARACTERISTIQUES D' UNE TENSION SINUSOIDALE	171
.12.2	DEPHASAGE ENTRE LES TENSIONS AUX BORNES DE DIPOLES DISPOSES EN SERIE 171	
.12.3	DEPHASAGE ENTRE LA TENSION AUX BORNES D' UN DIPOLE ET L' INTENSITE DU COURANT QUI LE TRAVERSE.....	172
.12.4	IMPEDANCE ET ADMITTANCE D' UN DIPOLE	173
.12.5	ETUDE DE DIPOLES ELEMENTAIRES EN REGIME SINUSOIDAL.....	173
.12.6	EXERCICES	177
.12.7	CORRIGES DES EXERCICES	178
.CHAPITRE 13	ASSOCIATIONS DE DIPOLES EN SERIE EN REGIME SINUSOIDAL. -. RESOLUTION PAR LA CONSTRUCTION DE FRESNEL	181
.13.1	GENERALITES.....	181

.13.2	DIPOLE R-C SERIE	182
.13.3	DIPOLE R-L SERIE	184
.13.4	DIPOLE R-L-C SERIE	185
.13.5	EXERCICES	188
.13.6	CORRIGE DES EXERCICES	191
.CHAPITRE 14 CIRCUIT RLC SERIE - RESONANCE D' INTENSITE		197
.14.1	LA RESONANCE D'INTENSITE	197
.14.2	ACTIVITE 1 -TRACE DE COURBES.....	198
.14.3	RELATIONS A LA RESONANCE.....	199
.14.4	ACTIVITE 2 NOTION DE BANDE PASSANTE A – 3 dB.....	202
.14.5	ACTIVITE 3 - Détermination EXPERIMENTALE DE LA LARGEUR DE LA BANDE PASSANTE.....	204
.14.6	ACTIVITE 4 INFLUENCE DE R SUR LA LARGEUR DE LA BANDE PASSANTE	205
.14.7	ACUITE DE LA RESONANCE.....	206
.14.8	DANGERS DE LA RESONANCE.....	207
.14.9	EXERCICE	207
.14.10	CORRIGE.....	207
.CHAPITRE 15 ASSOCIATIONS DE DIPOLES EN PARALLELE EN REGIME SINUSOIDAL. -. RESOLUTION PAR LA CONSTRUCTION DE FRESNEL		209
.15.1	ASSOCIATION DE DIPOLES EN PARALLELE.....	209
.15.2	DIPOLE R-L-C PARALLELE.....	210
.15.3	COMMENT FONCTIONNERAIT LE CIRCUIT PARALLELE LC PARFAIT ?	215
.15.4	EXERCICES	217
.15.5	CORRIGES	218
.CHAPITRE 16 UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES		221
.16.1	INTRODUCTION.....	221
.16.2	TENSION ET TENSION COMPLEXES	221
.16.3	DEFINITION DE L'IMPEDANCE COMPLEXE.....	222
.16.4	LOI D'OHM COMPLEXE	222
.16.5	IMPEDANCES COMPLEXES DE DIPOLES ELEMENTAIRES.	223
.16.6	ADMITTANCES COMPLEXES DE DIPOLES ELEMENTAIRES.	224
.16.7	ASSOCIATION DE DIPOLES EN SERIE	225
.16.8	ASSOCIATION DE DIPOLES EN PARALLELE.....	225
.16.9	ETUDE DU DIPOLE RLC PARALLELE	226
.16.10	EXERCICES	227
.16.11	CORRIGES DES EXERCICES	230
.CHAPITRE 17 PUISSANCES EN REGIME SINUSOIDAL		237
.17.1	PUISSANCES EN MONOPHASE.....	237

.17.2	PUISSANCES EN TRIPHASE.....	239
.17.3	PUISSANCE COMPLEXE EN MONOPHASE.....	240
.17.4	EXERCICES.....	241
.17.5	CORRIGES DES EXERCICES.....	244
.CHAPITRE 18 SIGNAUX PERIODIQUES – VALEURS MOYENNE ET EFFICACE		251
.18.1	GRANDEURS PERIODIQUES	251
.18.2	VALEUR MOYENNE.....	252
.18.3	VALEUR EFFICACE.....	253
.18.4	EXERCICES	254
.18.5	CORRIGES DES EXERCICES.....	255
REGIMES TRANSITOIRES.....		257
REGIMES TRANSITOIRES - DIPOLE RC.....		259
.18.6	CHARGE D’UN CONDENSATEUR.....	259
.18.7	DECHARGE D’UN CONDENSATEUR	262
.18.8	DIPOLE RC SOUMIS A UNE TENSION EN CRENEAUX	265
.18.9	EXERCICES	267
.18.10	CORRIGES DES EXERCICES	268
.CHAPITRE 19 REGIMES TRANSITOIRES - DIPOLE RL.....		273
.19.1	REPONSE D’UN DIPOLE RL A UN ECHELON DE TENSION.....	273
.19.2	DIPOLE RL SOUMIS A UNE TENSION EN CRENEAUX.....	275
.19.3	EXERCICE	277
.19.4	CORRIGE	277
.CHAPITRE 20 ACTIVITE :REGIME TRANSITOIRE - DIPOLE RLC		279
.20.1	LE PROBLEME.....	279
.20.2	ETUDE THEORIQUE DU REGIME TRANSITOIRE	281
.20.3	EXERCICE	282
.20.4	CORRIGE	283

.CHAPITRE 1 INTRODUCTION.

.1.1 LE SYSTEME INTERNATIONAL D'UNITES (SI)

.1.1.1 Unités de base du Système International.

Le système international date de 1960 et comporte 7 unités de base :

Grandeur	Nom de l'unité de base	Symbole de l'unité	Dimension
longueur	mètre	m	L
masse	kilogramme	kg	M
temps	seconde	s	T
intensité de courant électrique	ampère	A	I
température thermodynamique	kelvin	K	Θ
quantité de matière	mole	mol	N
intensité lumineuse	candela	cd	J

.1.1.2 Unités dérivées.

La plupart des unités sont des unités dérivées des unités de base :

Grandeur dérivée	Relation	Symbole	Dimension
vitesse	$v = \frac{dx}{dt}$	$m.s^{-1}$	$[v] = \frac{L}{T} = L.T^{-1}$
accélération	$a = \frac{dv}{dt}$	$m.s^{-2}$	$[a] = \frac{L.T^{-1}}{T} = L.T^{-2}$
force	$F = ma = m \frac{dv}{dt}$	N	$[F] = MLT^{-2}$
Tension électrique	$U = \frac{P}{I} = \frac{W}{TI}$	V	$[U] = \frac{MLT^{-2}L}{TI} = ML^2T^{-3}I^{-1}$

	$= \frac{FL}{TI} = \frac{maL}{TI}$		
Impédance	$Z = \frac{U}{I}$	Ω	$[Z] = \frac{ML^2T^{-3}I^{-1}}{I} = ML^2T^{-3}I^{-2}$
angle	$\theta = \frac{s}{R}$	rad	$[\theta] = \frac{L}{L} = \text{pas de dimension}$

Remarque :

le radian n'intervient pas dans une équation aux dimensions.

En effet dans la relation $s=R\theta$, s et R s'expriment en m ; le radian est la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 m sur une circonférence de 1 m de rayon

.1.1.3 Analyse dimensionnelle

Les équations aux dimensions permettent de vérifier l'homogénéité d'une relation ; on procède comme dans la dernière colonne du tableau précédent, c'est-à-dire que l'on en revient aux unités de base.

Exemple 1

La période des oscillations d'un pendule élastique est donnée par la relation

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

où k est la raideur du ressort et m la masse du corps suspendu au

ressort. Vérifions que cette relation est homogène

$$k = \frac{F}{x} \quad [k] = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2} \quad \left[\frac{m}{k} \right] = \frac{M}{MT^{-2}} = T^2$$

$$[T_0] = \left[\frac{m}{k} \right]^{1/2} = (T^2)^{1/2} = T \quad \text{dans le SI, } T_0 \text{ s'exprime en s}$$

Exemple 2

La constante de temps τ d'un dipôle RC est $\tau = RC$. Vérifions que cette relation est homogène

$$[C] = \left[\frac{Q}{U} \right] = \left[\frac{IT}{U} \right] = \frac{IT}{ML^2T^{-3}I^{-1}} = I^2T^4M^{-1}L^{-2}$$

$$[\tau] = [R][C] = (ML^2T^{-3}I^{-2})(I^2T^4M^{-1}L^{-2}) = T$$

.1.2 MULTIPLES ET SOUS MULTIPLES DES UNITES

Facteur	Préfixe	Symbole	Facteur	Préfixe	Symbole
10^{24}	yotta	Y	10^{-1}	déci	d
10^{21}	zetta	Z	10^{-2}	centi	c
10^{18}	exa	E	10^{-3}	milli	m
10^{15}	peta	P	10^{-6}	micro	μ
10^{12}	téra	T	10^{-9}	nano	n
10^9	giga	G	10^{-12}	pico	p
10^6	méga	M	10^{-15}	femto	f
10^3	kilo	k	10^{-18}	atto	a
10^2	hecto	h	10^{-21}	zepto	z
10	déca	da	10^{-24}	yocto	y

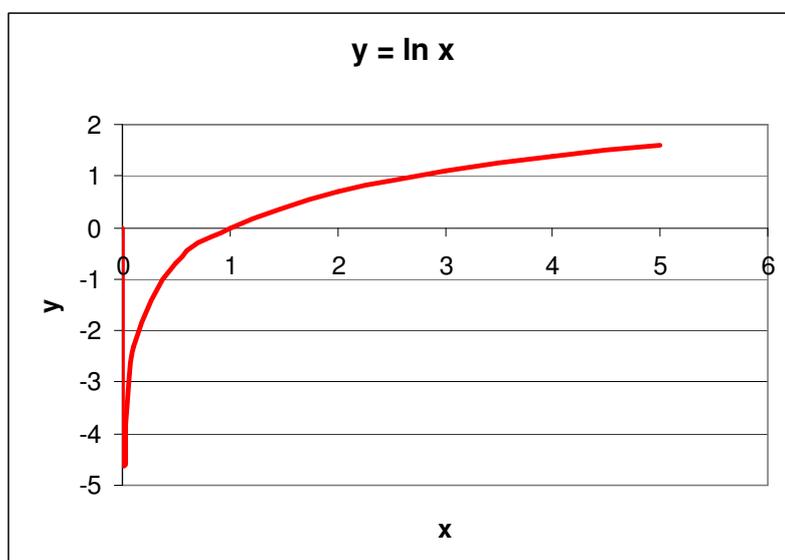
.1.3 FONCTIONS LOGARITHMES

.1.3.1 Fonction logarithme népérien

.1.3.1.1 Définition

$$\ln x = \int_1^x \frac{dx}{x} \quad x > 0$$

.1.3.1.2 Graphe de $\ln x$



x	0	1	e	∞
ln x	$-\infty$	0	1	∞

.1.3.1.3 Propriétés

Si $a > 0$ et $b > 0$ $\ln ab = \ln a + \ln b$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^n = n \ln a \quad \ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

.1.3.2 Fonction logarithme de base b

le logarithme népérien est un logarithme de base e

Le logarithme de base b est $\log_b x$.

$$\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$$

.1.3.3 Fonction logarithme de base 10 (logarithme décimal)

.1.3.3.1 Définition

Les logarithmes décimaux sont des logarithmes de base 10 notés lg

$$\lg x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10} \approx \frac{\ln x}{2,3}$$

.1.3.3.2 Graphe de lg x

x	0	1	2	10	100	1000	∞
lg x	$-\infty$	0	0,30103	1	2	3	∞

.1.3.3.3 Propriétés

$$\lg 10 = 1 \Leftrightarrow \lg 10^n = n$$

$$\lg ab = \lg a + \lg b$$

$$\lg\left(\frac{a}{b}\right) = \lg a - \lg b$$

$$\lg a^n = n \lg a \quad \lg \sqrt{a} = \frac{1}{2} \lg a$$

.1.4 FONCTIONS EXPONENTIELLES

.1.4.1 Définition

La fonction exponentielle de x , de base e , est $y = e^x$

C'est la fonction réciproque de $x = \ln y$

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

.1.4.2 Graphe de $y = e^x$

x	$-\infty$	0	1	∞
y	0	1	e	∞

.1.4.3 Propriétés

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{(x_1+x_2)}$$

$$e^{(nx)} = (e^x)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

.1.5 DIFFERENTIELLES

.1.5.1 Différentielle première d'une fonction d'une variable

Définition

La différentielle de la fonction $y=f(x)$ est :

$$dy = f'(x) dx$$

.1.5.2 Opérations sur les différentielles

.1.5.2.1 Différentielle d'une somme

$$\text{Si } y = u+v-w \quad dy = du+dv - dw$$

.1.5.2.2 Différentielle d'un produit

$$\text{Si } y = u.v \quad dy = u.dv + v.du$$

.1.5.2.3 Différentielle d'un quotient

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow dy = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

.1.5.2.4 Différentielle logarithmique

$$y = \frac{u \cdot v^2}{w} \quad \ln y = \ln u + 2 \ln v - \ln w \quad \text{à condition que } u, v \text{ et } w \text{ soient positifs}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{du}{u} + 2 \frac{dv}{v} - \frac{dw}{w}$$

.1.6 CALCUL D'INCERTITUDES

.1.6.1 Les erreurs sur les mesures.

Tout résultat de mesure est entaché d'erreurs.

Exemples d'erreurs :

- les erreurs dues à l'opérateur
- erreurs dues à la méthode de mesure
- erreurs liées à la précision d'un appareil

Soit une grandeur Y dépendant d'autres grandeurs A, B et C.

L'erreur sur a est $dA = A_{\text{mesuré}} - A_{\text{exact}}$ dA est >0 , <0 ou $=0$ dA est petit par rapport à A De même pour B et C etc

Ces erreurs ne sont pas connues pour la bonne raison que si on les connaissait, il n'y en aurait pas.

L'erreur qui en résulte sur Y est assimilée à la différentielle de Y

Exemple : $Y = aA + bB + cC$

Si les grandeurs A, B et C sont indépendantes

$$dY = a dA + b dB + c dC$$

si $Y = K A^\alpha B^\beta$, par différenciation on obtient $\frac{dY}{Y} = \alpha \frac{dA}{A} + \beta \frac{dB}{B}$

.1.6.2 Incertitudes

.1.6.2.1 Incertitude absolue

L'incertitude absolue sur A est la valeur maximale que pourrait prendre l'erreur dA sur A ; l'incertitude absolue sur A est positive et est notée ΔA .

Ceci signifie que $A = A_{\text{mesuré}} \pm \Delta A$ ou encore :

$$A_{\text{mesuré}} - \Delta A \leq A \leq A_{\text{mesuré}} + \Delta A$$

.1.6.2.2 Incertitude relative

L'incertitude relative sur A est le quotient de l'incertitude absolue sur A par A mesuré. Elle est notée $\frac{\Delta A}{A}$

.1.6.2.3 Précision ;

La précision d'une mesure est l'incertitude relative exprimée en pourcentage.

$$\frac{\Delta L}{L} = 0,02 \Rightarrow \text{Précision } 2\%$$

.1.6.3 Calculs d'incertitudes

Les valeurs et les signes des erreurs dA, dB etc ne sont pas connus.

On va donc se placer dans le cas le plus défavorable quand on passe des erreurs aux incertitudes.

Exemples :

Si les grandeurs sont indépendantes

$$Y = aA + bB + cC \quad \Delta Y = |a|\Delta A + |b|\Delta B + |c|\Delta C$$

$$Y = K A^\alpha B^\beta \quad \frac{\Delta Y}{Y} = |\alpha| \frac{\Delta A}{A} + |\beta| \frac{\Delta B}{B}$$

.1.6.4 Exemples d'application

.1.6.4.1 Exemple 1 :

Un multimètre affiche 1,456 V. Le constructeur de l'appareil indique une précision de 0,5 % + 3 digits.

Cela signifie que l'incertitude sur U est :

$$\Delta U = 1,456 \frac{0,5}{100} + (3 \times 0,001) = 0,01V \quad \text{Comme l'incertitude absolue est de}$$

l'ordre du centième de volt, il ne faut pas faire figurer le millième de volt dans les résultats. Le résultat sera présenté sous la forme : $U = 1,46 \pm 0,01V$

Cette notation est purement conventionnelle. Il est préférable d'écrire : $1,45 \leq U \leq 1,47V$, cette écriture est plus claire.

.1.6.4.2 Exemple 2

On mesure les capacités de deux condensateurs :

$$C_1 = 20 \pm 1 \mu F \quad C_2 = 2,0 \pm 0,1 \mu F$$

Soit C la capacité de l'association des deux condensateurs en parallèle.

$$C = C_1 + C_2 \quad \Delta C = \Delta C_1 + \Delta C_2 \quad \Delta C = 1,1 \mu\text{F}$$

$$20 \leq C \leq 22 \mu\text{F}$$

.1.6.4.3 Exemple 3

La tension aux bornes d'une résistance est $U = 12,0 \text{ V}$

$$R = 47,1 \Omega.$$

Quelle est la puissance consommée ?

$$P = \frac{U^2}{R} \quad P = \frac{12^2}{47,1} = 3,057324841 \text{ W} \text{ valeur fournie par la calculatrice !}$$

En absence d'indication, on considère que l'incertitude absolue est égale à une demi-unité du dernier chiffre exprimé.

$$\Delta U = 0,05 \text{ V} \quad \Delta R = 0,05 \Omega$$

$$\frac{dP}{P} = 2 \frac{dU}{U} - \frac{dR}{R} \Rightarrow \frac{\Delta P}{P} = 2 \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta R}{R}$$

$$\frac{\Delta P}{P} = 2 \frac{0,05}{12} + \frac{0,05}{47,1} = 0,01 \quad \Delta P = 0,01 \times 3,06 = 0,03 \text{ W}$$

$$3,03 \leq P \leq 3,09 \text{ W}$$

.1.6.4.4 Exemple 4

La réactance X d'un dipôle RLC est donnée par l'expression :

$$X = \frac{A}{B} = \frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega}$$

A et B ne sont pas indépendants ; en effet A et B font intervenir ω .

$$\text{On ne peut pas écrire dans ce cas } \frac{\Delta X}{X} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$$

On différencie

$$\frac{dX}{X} = \frac{d(LC\omega^2 - 1)}{LC\omega^2 - 1} - \frac{d(C\omega)}{C\omega} = \frac{d(LC\omega^2)}{LC\omega^2 - 1} - \frac{dC}{C} - \frac{d\omega}{\omega}$$

$$\frac{d(LC\omega^2)}{LC\omega^2} = \frac{dL}{L} + \frac{dC}{C} + 2 \frac{d\omega}{\omega} \Rightarrow d(LC\omega^2) = LC\omega^2 \left(\frac{dL}{L} + \frac{dC}{C} + 2 \frac{d\omega}{\omega} \right)$$

$$\frac{dX}{X} = \frac{LC\omega^2}{LC\omega^2 - 1} \left(\frac{dL}{L} + \frac{dC}{C} + 2 \frac{d\omega}{\omega} \right) - \frac{dC}{C} - \frac{d\omega}{\omega}$$

On rassemble les termes. Il ne faut absolument pas passer aux valeurs absolues à ce niveau.

$$\frac{dX}{X} = \left(\frac{LC\omega^2}{LC\omega^2 - 1} \right) \frac{dL}{L} + \frac{dC}{C} \left(\frac{LC\omega^2}{LC\omega^2 - 1} - 1 \right) + \left(2 \frac{LC\omega^2}{LC\omega^2 - 1} - 1 \right) \frac{d\omega}{\omega}$$

On passe alors aux incertitudes.

$$\frac{\Delta X}{X} = \left| \frac{LC\omega^2}{LC\omega^2 - 1} \right| \frac{\Delta L}{L} + \left| \frac{LC\omega^2}{LC\omega^2 - 1} - 1 \right| \frac{\Delta C}{C} + \left| 2 \frac{LC\omega^2}{LC\omega^2 - 1} - 1 \right| \frac{\Delta \omega}{\omega}$$

.1.6.5 Nombre de chiffres significatifs

C'est le nombre de chiffres utilisés dans l'écriture du nombre, les zéros écrits à la fin du nombre sont significatifs, les zéros écrits au début du nombre ne sont pas significatifs,

Exemple :

$U=182 \text{ mV}$ $U=182 \times 10^{-3} \text{ V}$ $U=0,182 \text{ V}$ sont des écritures équivalentes ; elles comprennent 3 chiffres significatifs.

$$\frac{\Delta U}{U} = \frac{0,5}{182} = \frac{0,5 \times 10^{-3}}{182 \times 10^{-3}} = \frac{0,0005}{0,182} = 0,28\% \text{ La précision est la même dans les trois}$$

cas.

Si on écrit $U=182,0 \text{ V}$, le résultat est plus précis $\frac{\Delta U}{U} = \frac{0,05}{182} = 0,028\%$, le nombre de chiffres significatifs est plus important (4)

Remarque :

En physique, les résultats sont présentés couramment avec deux ou trois chiffres significatifs

.1.6.6 Notation scientifique d'un résultat.

Exemple : la mesure d'une longueur a donné $L= 10\ 000 \text{ m}$

Lorsqu'on écrit $L = 10\ 000 \text{ m}$, la précision est $\frac{\Delta L}{L} = \frac{0,5}{10\ 000} = 0,5 \times 10^{-4}$ soit 0,005%

Lorsqu'on écrit $L = 1,0 \times 10^4 \text{ m}$, la précision est $\frac{\Delta L}{L} = \frac{0,05 \times 10^4}{1 \times 10^4} = 0,05$ soit 5%

La précision n'est pas du tout la même dans les deux cas.

En notation scientifique, on écrit le premier chiffre, différent de zéro, suivi d'une virgule puis des autres chiffres et de la puissance de 10 convenable.

On écrira pour L : $L = 1,0 \times 10^4 \text{ m}$ précision correcte dans les problèmes courants

.1.7 EQUATIONS DIFFERENTIELLES.

.1.7.1 Equation différentielle du premier ordre :

.1.7.1.1 Equation différentielle du premier ordre avec second membre:

$$a \frac{dy}{dt} + by = c \quad a, b \text{ et } c \text{ étant des constantes et } y \text{ étant fonction du temps}$$

$y = A e^{\alpha t} + B$ est solution de cette équation

A , α et B sont des constantes dont on détermine la valeur en tenant compte des conditions initiales.

.1.7.1.2 Equation différentielle du premier ordre sans second membre:

$$a \frac{dy}{dt} + by = 0$$

a et b étant des constantes et y étant fonction du temps

$y = A e^{\alpha t}$ est solution de cette équation

A et α sont des constantes dont on détermine la valeur en tenant compte des conditions initiales.

.1.7.2 Equation différentielle du second ordre sans second membre

Soit l'équation :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

où ω est une constante et y une fonction du temps.

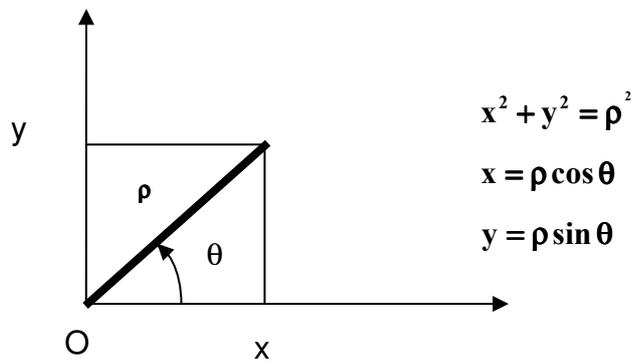
$y = A \cos(\omega t + \varphi)$ est solution de cette équation

A et φ sont des constantes dont on détermine la valeur en tenant compte des conditions initiales.

.1.8 LES NOMBRES COMPLEXES.

.1.8.1 Notations d'un nombre complexe

Notation complexe rectangulaire : $z = x + jy$



Notation complexe polaire : $\underline{z} = \rho \angle \theta$

Notation complexe exponentielle : $\underline{z} = \rho e^{j\theta}$

Notation complexe trigonométrique : $\underline{z} = \rho(\cos \theta + j \sin \theta)$

.1.8.2 Nombre complexe conjugué.

Le nombre complexe conjugué \underline{z}^* de $\underline{z} = x + jy$ est $\underline{z}^* = x - jy$

$$\underline{z}^* = \rho \angle -\theta \quad \underline{z}^* = \rho e^{-j\theta} \quad \underline{z}^* = \rho(\cos \theta - j \sin \theta)$$

.1.8.3 Somme de nombres complexes

Si $\underline{z}_1 = x_1 + jy_1$ et $\underline{z}_2 = x_2 + jy_2 \Rightarrow \underline{z} = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = x_1 + x_2 + j(y_1 + y_2)$

.1.8.4 Multiplication de nombres complexes

si $\underline{z}_1 = \rho_1 e^{j\theta_1}$ et $\underline{z}_2 = \rho_2 e^{j\theta_2} \Rightarrow \underline{z}_1 \underline{z}_2 = \rho_1 e^{j\theta_1} \rho_2 e^{j\theta_2} = \rho_1 \rho_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)} = \rho_1 \rho_2 \angle (\theta_1 + \theta_2)$

$$\underline{z}_1 \underline{z}_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2)$$

$$\underline{z}_1 \underline{z}_2 = (x_1 x_2 + j^2 y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$$j \cdot j = j^2 = -1$$

$$\underline{z}_1 \underline{z}_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

.1.8.5 Division de nombres complexes

De même $\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

$$\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + j(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

.1.8.6 Racine carrée

si $z = \rho \angle \theta = \rho \angle (\theta + 2k\pi) \Rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \angle \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$ avec $k=0, \pm 1, \pm 2 \dots$

.1.8.7 Logarithme d'un nombre complexe

$$\ln z = \ln \rho e^{j(\theta + \pi 2k)} = \ln \rho + j(\theta + \pi 2k)$$

.1.9 CARACTERES GRECS

Majus- cules	Minus- cules	Nom	Majus- cules	Minus- cules	Nom
A	α	alpha	Π	ϖ	pi
B	β	bêta	P	ρ	rhô
K	κ	kappa	Σ	σ	sigma
Δ	δ	delta	T	τ	tau
E	ε	epsilon	Y	υ	upsilon
Φ	φ	phi	Ξ	ξ	xi
Γ	γ	gamma	Z	ζ	zêta
I	i	iota	H	η	êta
Λ	λ	lambda	Θ	θ	thêta
M	μ	mu	X	χ	khi
N	ν	nu	Ψ	ψ	psi
O	o	omicron	Ω	ω	oméga

ELECTROCINETIQUE

.CHAPITRE 2 INTENSITE ET TENSION EN COURANT CONTINU

.2.1 GENERALITES.

- Un circuit électrique est constitué d'un ou plusieurs générateurs alimentant des appareils récepteurs par l'intermédiaire de conducteurs.

- Un dipôle électrique est une portion de circuit limitée par deux points.

- Un dipôle est passif lorsqu'il n'existe pas de tension électrique aux bornes du dipôle lorsqu'il n'est pas relié à d'autres appareils ; il est dit actif dans le cas contraire.

- Un nœud est le point de connexion de trois dipôles au moins.

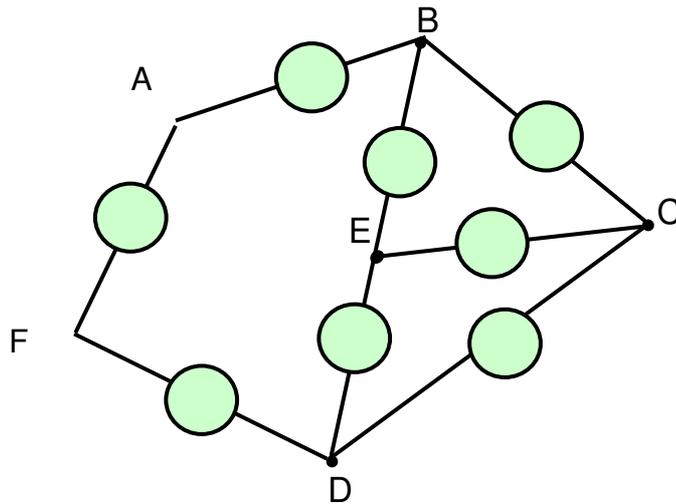
- Une branche est constituée d'un ou plusieurs dipôles en série ; elle est limitée, à chaque extrémité, par un nœud.

- Un générateur transforme une forme d'énergie en énergie électrique fournie au reste du circuit

- Un récepteur transforme l'énergie électrique reçue en d'autres formes d'énergie.

- Les conducteurs laissent passer le courant électrique.

- Les isolants offrent une très grande résistance au passage du courant électrique



 représente un dipôle quelconque

Le circuit comporte :

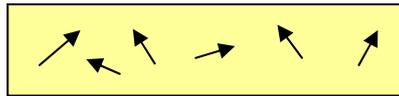
- 4 noeuds: B, E, D, C (A et F ne sont pas des noeuds)
- 7 mailles : ABEDFA, ABCDFA, ABCEDFA, ABECDFFA, BCDEB, BCDB, ECDE
- 6 branches : DAFB, EB, ED, BC, EC, DC

.2.2 NATURE DU COURANT ELECTRIQUE.

.2.2.1 Dans un métal.

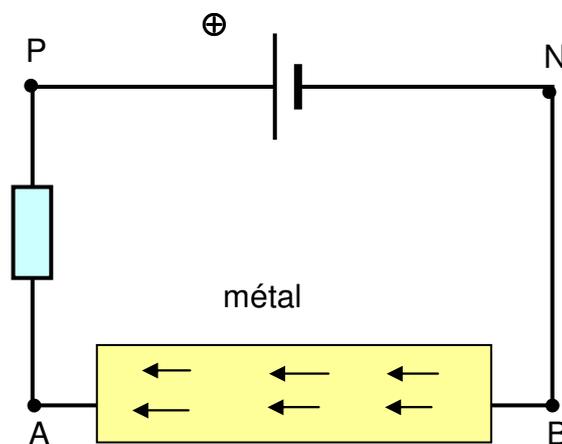
Un métal est constitué d'atomes; certains électrons de ces atomes subissent moins l'attraction de leur noyau et peuvent se déplacer au sein du métal: ces électrons sont appelés électrons libres.

Lorsque le métal n'est pas parcouru par un courant ces électrons sont animés de mouvements incessants et désordonnés.



Métal non inséré dans le circuit électrique

Lorsque le circuit est fermé, une onde électromagnétique se propage à la vitesse de la lumière provoquant un déplacement d'ensemble d'électrons libres du pôle moins vers le pôle plus du générateur à l'extérieur de celui-ci.



La vitesse de déplacement des électrons est très faible (de l'ordre du mm par seconde).

Le générateur joue le rôle d'une pompe à électrons.

.2.2.2 Dans un électrolyte.

Il n'y a jamais de déplacement d'électrons dans une solution mais déplacement d'ions: déplacement des cations (chargés positivement) dans un sens et des anions (chargés négativement) dans l'autre.

.2.3 DEFINITION D'UN COURANT ELECTRIQUE.

C'est un mouvement ordonné de particules électrisées.

Exemples :

un mouvement ordonné d'électrons (chargés négativement) est un courant.

un mouvement ordonné de protons (chargés positivement) est un courant

Sens conventionnel du courant électrique.

Conventionnellement, le courant électrique circule du pôle + vers le pôle – à l'extérieur du générateur.

Cette convention est due au physicien Ampère (vers 1850). Ampère pensait que le courant était un mouvement de charges positives ; au début du XXème siècle, on a prouvé que, dans un métal, le courant était un mouvement de charges négatives (électrons). En hommage à Ampère, et aussi par ce que un courant peut être un mouvement de charges positives, on a gardé cette convention.

.2.4 INTENSITE D'UN COURANT ELECTRIQUE.

.2.4.1 Définition de l'intensité d'un courant continu.

Chaque porteur de charge porte une quantité d'électricité exprimée en coulomb. L'intensité du courant est égale à la valeur absolue de la quantité d'électricité Q transportée par les porteurs de charge qui traversent une section de conducteur pendant une durée Δt divisée par cette durée.

$$I = \frac{|Q|}{\Delta t} \quad |Q| = I \Delta t$$

Dans le système international, I s'exprime en A Q en C Δt en s

$$|Q| = I \Delta t$$

Q en C I en A Δt en s

Autres unités : Q en A.h I en A Δt en h

□ exercice 1

.2.4.2 Mesure de l'intensité d'un courant.

L'intensité se mesure à l'aide d'un ampèremètre, appareil qui se place en série avec l'appareil qui est traversé par le courant dont on veut mesurer l'intensité.

.2.4.3 Circuit ne comportant que des appareils en série.

L'intensité du courant est la même en tous les points d'un circuit en série.

.2.4.4 Algébrisation de l'intensité

A et B étant les bornes d'un dipôle :

i_{AB} est > 0 si le courant circule réellement dans le dipôle AB de A vers B

i_{AB} est < 0 si le courant circule réellement dans le dipôle AB de B vers A

Conventions utilisées dans le cours.

Flèche sur le conducteur

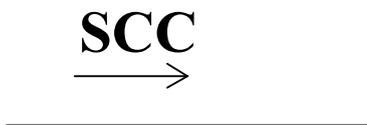


la flèche sur le conducteur indique le choix du sens positif pour l'intensité.

si $I > 0$, le courant circule dans le sens de la flèche.

si $I < 0$, le courant circule dans le sens inverse de la flèche.

Flèche en dehors du conducteur.



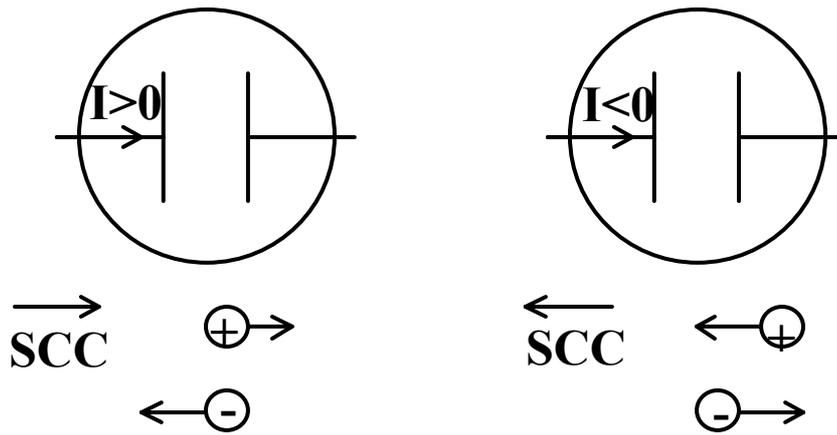
la flèche en dehors du conducteur indique le sens conventionnel du courant (sens de circulation des charges mobiles positives réelles ou hypothétiques).

Exemples

Cas d'un conducteur métallique



.2.4.4.1 cas d'un électrolyte



.2.4.5 Loi des noeuds.

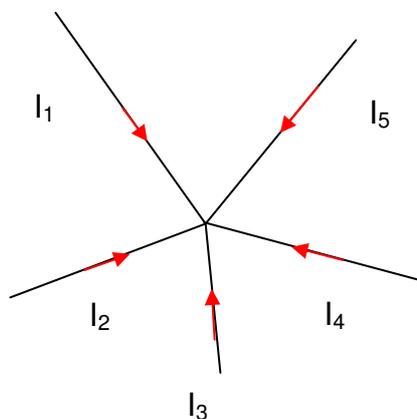
Les flèches représentent les sens positifs choisis pour chaque branche.

$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0$, quels que soient les sens des courants

Naturellement, tous les termes de cette somme nulle n'ont pas même signe.

Loi :

La somme des intensités des courants arrivant et partant d'un nœud est nulle



$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

□ exercice 2

.2.5 TENSION ELECTRIQUE OU DIFFERENCE DE POTENTIEL.

.2.5.1 Notion de tension.

La tension électrique est une notion abstraite issue du calcul du travail de la force électrostatique.

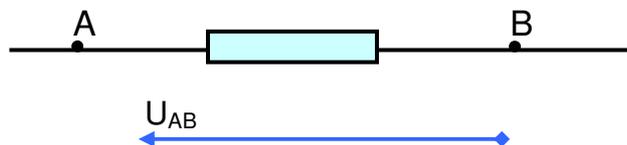
Entre les bornes d'une pile existe une tension ou différence de potentiel; cette tension est liée au fait que les deux bornes de la pile ne sont pas dans le même état électrique. Lorsqu'on relie ses bornes à celles d'une lampe, celle-ci brille car elle est parcourue par un courant électrique.

.2.5.2 Généralisation:

S'il existe entre deux points A et B une tension et si l'on relie A et B par un dipôle passif, celui-ci sera parcouru par un courant.

.2.5.3 Notation d'une tension

La tension entre A et B est notée U_{AB} . Elle est représentée par une flèche dirigée de B vers A



U_{AB} est > 0 , < 0 ou nulle

.2.5.4 Différence de potentiel.

Par définition la tension entre A et B est égale à la différence entre le potentiel du point A et le potentiel du point B.

$U_{AB} = V_A - V_B$ où V_A et V_B sont les potentiels électriques de A et de B

Seule la différence de potentiel est définie; le potentiel d'un point ne l'est pas sauf si l'on convient d'attribuer au potentiel d'un point déterminé du circuit une valeur déterminée (généralement zéro V).

Exemple : Batterie d'accumulateurs

Le tableau montre que l'on peut changer les potentiels attribués aux deux points en conservant une différence constante.

Potentiel du pôle positif V_P	Potentiel du pôle négatif V_N	$U_{PN} = V_P - V_N$
12 V	0 V	12 V
100 V	88 V	12 V
- 12 V	-15 V	12 V

.2.5.5 La tension est une grandeur algébrique.

$$V_A - V_B = -(V_B - V_A)$$

$$U_{AB} = -U_{BA}$$

.2.5.6 Mesure d'une tension

Une tension est mesurée par un voltmètre, appareil qui se place toujours en dérivation par rapport au dipôle aux bornes duquel on veut mesurer la tension.

.2.5.7 Additivité des tensions.

A, B, C et D étant des points quelconques d'un circuit électrique pris dans n'importe quel ordre:

$$V_A - V_B = V_A - V_C + V_C - V_D + V_D - V_B$$

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CD} + U_{DB}$$

Cette relation ressemble, du point de vue formel, à la relation de Chasles.

□ exercice 3

.2.5.8 Loi des branches.

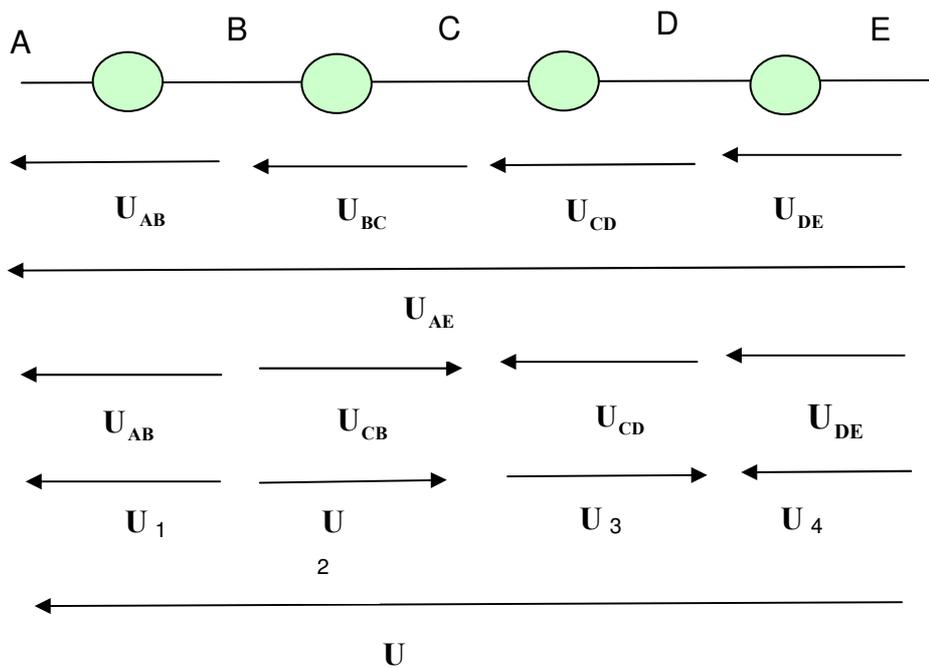
Soit la branche AE . $U_{AE} = U_{AB} + U_{BC} + U_{CD} + U_{DE}$

Voici quelques relations, illustrant la loi des branches, que l'on peut écrire dans le cas de figure, à partir de la relation précédente.

$$U_{AE} = U_{AB} - U_{CB} + U_{CD} + U_{DE}$$

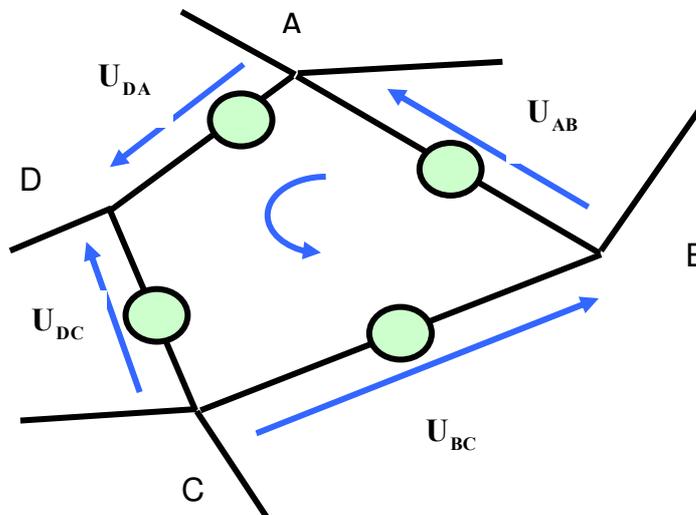
$$U = U_1 - U_2 - U_3 + U_4$$

La tension aux bornes d'une branche est égale à la somme des tensions aux bornes des dipôles composant cette branche pour lesquels la tension est fléchée dans le même sens, diminuée de la somme des tensions aux bornes des dipôles pour lesquels la tension est fléchée dans le sens contraire.



exercice 4

.2.5.9 Loi des mailles



On considère la maille ADCBA ; l'ordre des lettres indique le sens de parcours

$$U_{AA} = 0 \quad U_{AA} = U_{AD} + U_{DC} + U_{CB} + U_{BA}$$

Si on fait intervenir les tensions fléchées sur le schéma, on peut écrire :

$$0 = -U_{DA} - U_{DC} + U_{BC} - U_{AB}$$

Cette relation illustre la loi des mailles que l'on peut énoncer ainsi :

Lorsqu'on parcourt complètement une maille, la somme des tensions aux bornes des dipôles composant cette maille est nulle si l'on affecte les tensions

fléchées dans le sens de parcours du signe + et celles fléchées en sens inverse du signe –

□ exercice 5

Remarques importantes.

➤ Pour qu'un courant circule dans un dipôle passif, il faut lui appliquer une tension non nulle.

Il ne peut y avoir courant que s'il y a tension.

➤ Aux bornes d'une prise de « courant » du secteur EDF existe une tension : il n'y aura courant que si l'on alimente un appareil électrique à partir de cette prise.

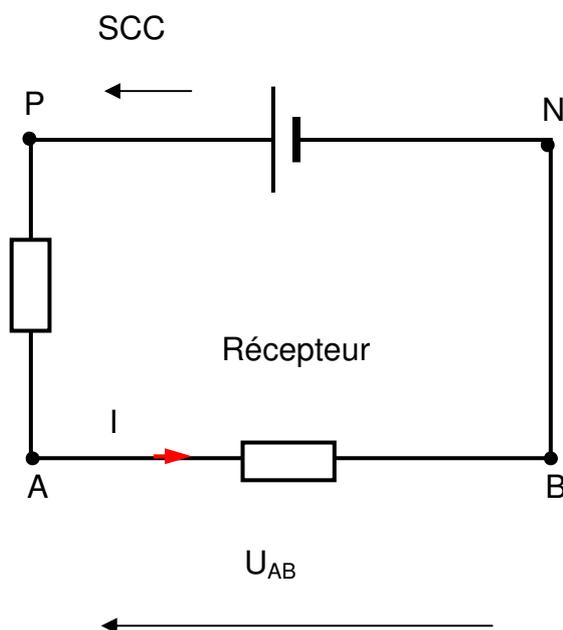
➤ Mais, quand une tension existe aux bornes d'un dipôle, il n'y a pas toujours de courant circulant dans ce dipôle. C'est le cas notamment aux bornes d'un interrupteur ouvert.

.2.5.10 Sens conventionnel du courant électrique

Dans un circuit le courant circule conventionnellement du pôle + au pôle - à l'extérieur du générateur.

Dans un circuit le courant circule conventionnellement, à l'extérieur du générateur, dans le sens des potentiels décroissants

$$V_P > V_A > V_B > V_N$$



Remarque concernant le fléchage :

- l'intensité est fléchée sur le conducteur
- la tension aux bornes d'un dipôle est fléchée à côté de ce dipôle.

.2.6 PUISSANCE ET ENERGIE ELECTRIQUE

.2.6.1 Puissance échangée entre un dipôle et le reste du circuit

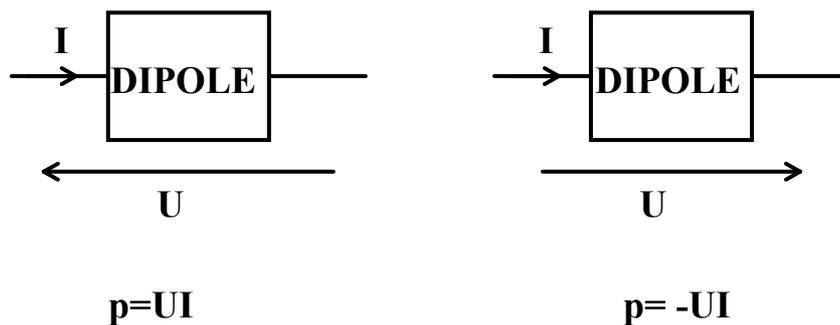
Quel que soit le dipôle, qu'il soit générateur ou récepteur, il y a deux façons de flécher I et U (I et U fléchées en sens inverses et I et U fléchées dans le même sens).

La puissance a pour expression soit $P=UI$ si U et I sont fléchées en sens inverses soit $P= - UI$ si U et I sont fléchées dans le même sens

Dans les deux cas P représente la puissance échangée par le dipôle avec le reste du circuit. Le système est « le dipôle » avec, pour les échanges, les conventions thermodynamiques.

$P>0$ le dipôle est récepteur

$P<0$ le dipôle est générateur



.2.6.2 Energie échangée entre un dipôle et le reste du circuit

L'énergie W échangée pendant une durée $\Delta t > 0$ est :

$$W= P. \Delta t$$

W est > 0 quand le dipôle est récepteur.

W est < 0 quand le dipôle est générateur.

.2.6.3 Unités.

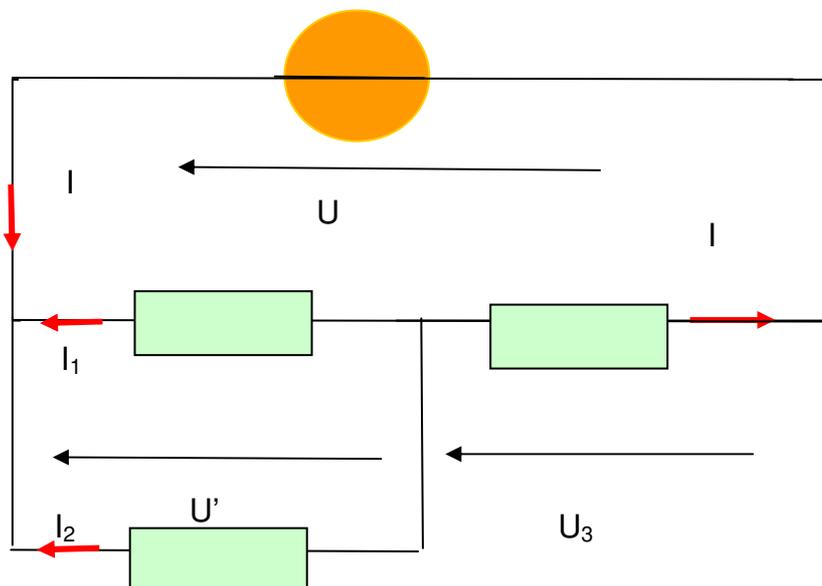
SI: P en W W en J U en V I en A $\Delta t.$ en s

Autres unités: si $\Delta t.$ en h et P en kW W en kWh

□ Exercice 6

.2.6.4 Bilan de puissance dans un circuit

.2.6.4.1 Exemple :



Le dipôle générateur alimente les trois récepteurs

Les puissances mises en jeu sont $- UI$ pour le générateur, $- U'I_1$, $- U'I_2$ et $+ U_3I$ pour les récepteurs, compte tenu du fléchage des intensités et des tensions.

La loi des nœuds s'écrit ici : $I + I_1 + I_2 = 0$

Or $U = U' + U_3$ $UI = U'I_1 + U_3I$ $UI = U'(-I_1 - I_2) + U_3I$ $UI = -U'I_1 - U'I_2 + U_3I$

$-UI - U'I_1 - U'I_2 + U_3I = 0$

$P_{\text{générateur}} + P_{\text{récepteur 1}} + P_{\text{récepteur 2}} + P_{\text{récepteur 3}} = 0$

La somme des puissances mises en jeu dans le circuit est nulle.

Utilisons les valeurs numériques :

$$U=12 \text{ V} \quad U'=5 \text{ V} \quad I=5 \text{ A} \quad I_1=-2 \text{ A} \quad I_2=-3 \text{ A}$$

Puissance mise en jeu par le générateur $-UI = -60 \text{ W}$

Puissance mise en jeu par le récepteur 1 $-U'I_1 = -5(-2) = +10 \text{ W}$

Puissance mise en jeu par le récepteur 2 $-U'I_2 = -5(-3) = +15 \text{ W}$

Puissance mise en jeu par le récepteur 3 $+U'I_3 = 7(5) = +35 \text{ W}$

On vérifie $\sum P = 0$

.2.6.4.2 Généralisation.

Dans un circuit quelconque la somme des puissances échangées par tous les dipôles constituant le circuit est nulle.

□ Exercice 7

.2.7 EXERCICES

.2.7.1 □ exercice 1

L'intensité du courant circulant dans un conducteur a pour valeur 500 mA. Déterminer le débit électronique (nombre d'électrons traversant une section de conducteur en une seconde). La valeur absolue de la charge de l'électron est $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

.2.7.2 □ Exercice 2

On considère un nœud, point de concours de cinq branches.

On compte positivement les courants qui se dirigent vers le nœud

Dans la branche 1 les électrons circulent vers le nœud et la valeur absolue de l'intensité est de 2 A

Dans la branche 2 $I_2 = -3 \text{ A}$

Dans la branche 3 le sens conventionnel du courant est du nœud vers l'extérieur et la valeur absolue de l'intensité est de 5 A

Dans la branche 4 $I_4 = 4 \text{ A}$

Quelle est la valeur algébrique de l'intensité du courant dans la branche 5 ?

.2.7.3 □ Exercice 3

A, B, C, D et E sont des noeuds dans un circuit.

$$U_{AB} = -5 \text{ V}$$

$$U_{BD} = 15 \text{ V}$$

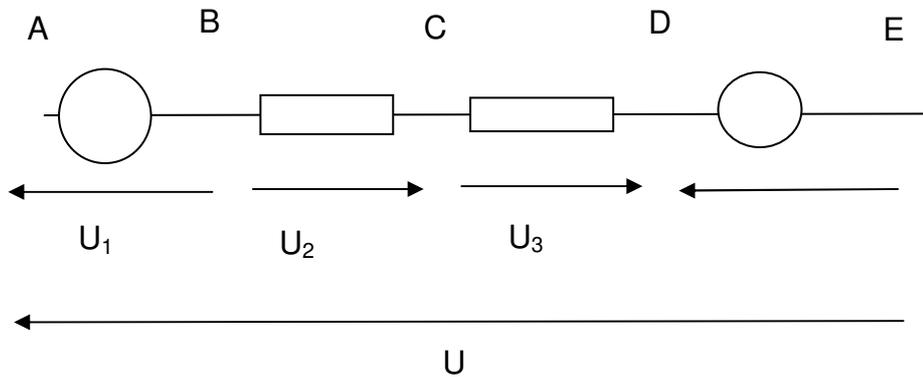
$$U_{CD} = 4 \text{ V}$$

$$U_{CE} = 6 \text{ V}$$

Calculer U_{BC} , U_{DE} , U_{AD} et U_{AE} .

.2.7.4 □ Exercice 4

On considère la branche suivante :



$$U_{AB} = 15 \text{ V}$$

$$U_2 = -4 \text{ V}$$

$$U_4 = 3 \text{ V}$$

$$U_{AE} = 25 \text{ V}$$

$$V_A = 30 \text{ V}$$

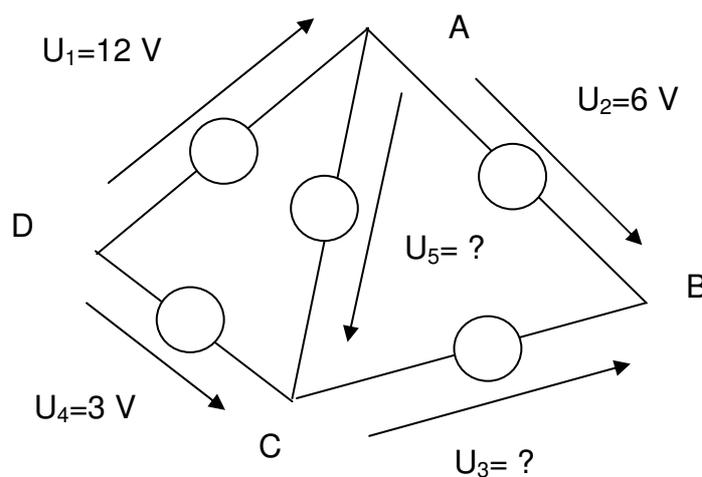
Déterminer les potentiels des points B, C, E et les valeurs algébriques de U_1 et

U

Par application de la loi des branches, déterminer la valeur algébrique de U_3

En déduire V_D

.2.7.5 □ Exercice 5

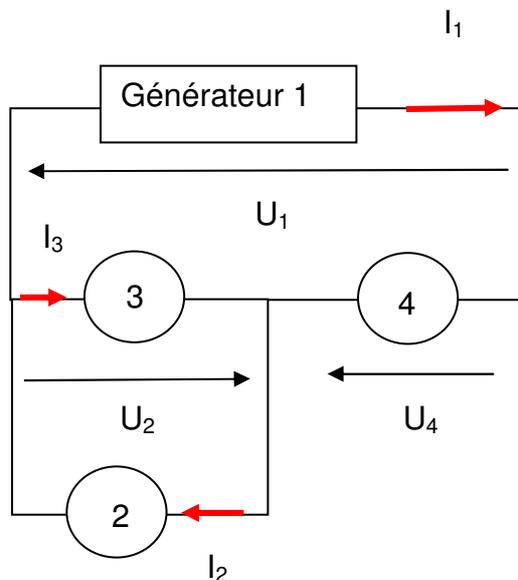


Par application de la loi des mailles déterminer les valeurs algébriques des tensions inconnues.

2.7.6 □ Exercice 6

Un dipôle électrique, aux bornes duquel la tension a pour valeur absolue 100 V, est parcouru par un courant dont la valeur absolue de l'intensité vaut 10 A. Quelle est la puissance échangée entre le dipôle et le reste du circuit ? Envisager tous les cas possibles et préciser dans chaque cas la nature du dipôle.

2.7.7 □ Exercice 7



Un générateur alimente trois récepteurs. $I_1 = -5\text{ A}$ $I_3 = 2\text{ A}$

P_1, P_2, P_3 et P_4 sont les puissances que chaque dipôle échange avec le reste du circuit. $P_1 = -500\text{ W}$ $P_2 = 180\text{ W}$

Déterminer toutes les inconnues (intensités, tensions, puissances).

2.7.8 * Exercice 8

Le circuit représenté ne comporte qu'un seul générateur situé entre P et N

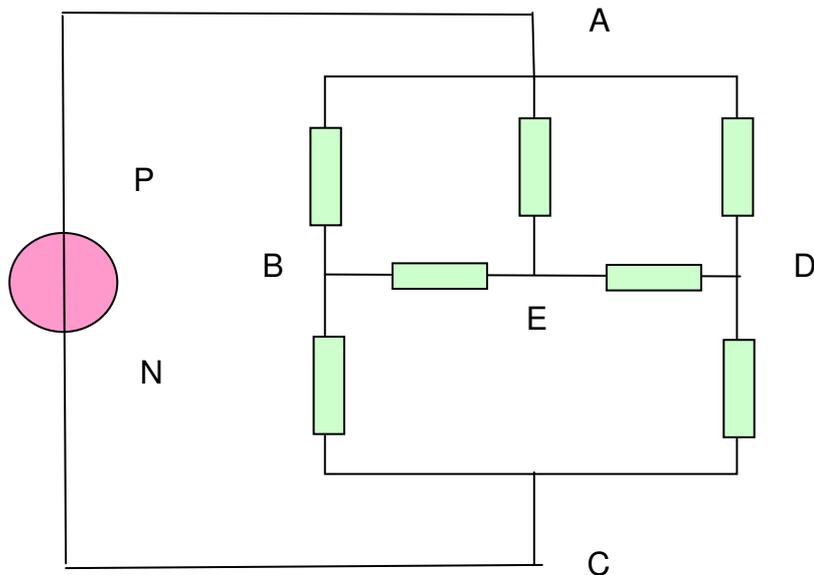
$$U_{AB} = 40\text{ V}$$

$$U_{BC} = 20\text{ V}$$

$$U_{BE} = 10\text{ V}$$

$$U_{ED} = 6\text{ V}$$

Calculer les tensions aux bornes de chaque dipôle



.2.7.9 * Exercice 9

Un générateur fournit au circuit électrique une puissance de 100 W et est le siège d'une production d'énergie thermique de 6 kJ en 10 min.

Quelle est la puissance totale du générateur ?

.2.7.10* Exercice 10

Un moteur consomme une puissance électrique de 2000 W. Le rendement de ce moteur est de 90 %. Déterminer l'énergie dissipée par effet Joule dans le moteur en 1h 20 min (résultat en J et en kWh)

.2.8 CORRIGES DES EXERCICES

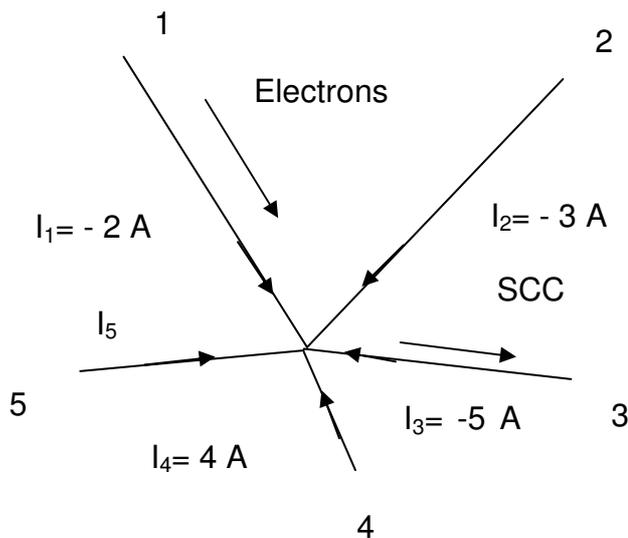
.2.8.1 Corrigé de l'exercice 1

$$Q = I \cdot \Delta t = ne$$

$$\frac{n}{\Delta t} = \frac{I}{e}$$

$$\frac{n}{\Delta t} = \frac{0,5}{1,6 \times 10^{-19}} = 3,1 \times 10^{18} \text{ électrons par seconde}$$

.2.8.2 Corrigé de l'exercice 2



$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0$$

$$-2 - 3 - 5 + 4 + I_5 = 0 \quad I_5 = 6 \text{ A}$$

.2.8.3 Corrigé de l'exercice 3

$$U_{BC} = U_{BD} + U_{DC} = U_{BD} - U_{CD} \quad U_{BC} = 15 - 4 = 11 \text{ V}$$

$$U_{DE} = U_{DC} + U_{CE} = -U_{CD} + U_{CE} \quad U_{DE} = -4 + 6 = 2 \text{ V}$$

$$U_{AD} = U_{AB} + U_{BD} \quad U_{AD} = -5 + 15 = 10 \text{ V}$$

$$U_{AE} = U_{AB} + U_{BD} + U_{DC} + U_{CE}$$

$$U_{AE} = U_{AB} + U_{BD} - U_{CD} + U_{CE} \quad U_{AE} = -5 + 15 - 4 + 6 = 12 \text{ V}$$

.2.8.4 Corrigé de l'exercice 4

$$U_{AB} = V_A - V_B \quad 15 = 30 - V_B \quad V_B = 15 \text{ V} \quad U_1 = U_{AB} = 15 \text{ V}$$

$$U_2 = V_C - V_B \quad V_C = V_B + U_2 \quad V_C = 15 - 4 = 11 \text{ V}$$

$$U_{AE} = U = V_A - V_E \quad 25 = 30 - V_E \quad V_E = 5 \text{ V}$$

$$U = U_1 - U_2 - U_3 + U_4 \quad U_3 = -U + U_1 - U_2 + U_4$$

$$U_3 = -25 + 15 + 4 + 3 = -3 \text{ V}$$

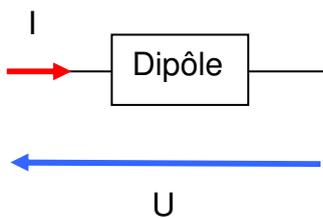
$$U_3 = V_D - V_C \quad V_D = U_3 + 11 \quad V_D = -3 + 11 = 8 \text{ V}$$

.2.8.5 Corrigé de l'exercice 5

$$\text{Maille ACDA : } U_5 - U_4 + U_1 = 0 \quad U_5 = U_4 - U_1 = 3 - 12 = -9 \text{ V}$$

$$\text{Maille ABCA : } U_2 - U_3 - U_5 = 0 \quad U_3 = U_2 - U_5 = 6 - (-9) = 15 \text{ V}$$

.2.8.6 Corrigé de l'exercice 6



$$P = UI$$

Si I et U sont fléchées en sens inverse

$$I = 10 \text{ A} \quad U = 100 \text{ V}$$

$$P = UI = 1000 \text{ W} \quad \text{CAS 1}$$

$P > 0$ le dipôle est récepteur

$$I = 10 \text{ A} \quad U = -100 \text{ V}$$

$$P = UI = -1000 \text{ W} \quad \text{CAS 2}$$

$P < 0$ le dipôle est générateur

$$I = -10 \text{ A} \quad U = 100 \text{ V}$$

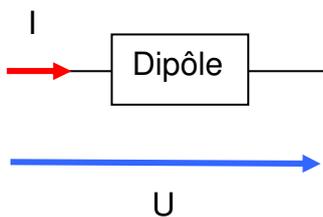
$$P = UI = -1000 \text{ W} \quad \text{CAS 3}$$

$P < 0$ le dipôle est générateur

$$I = -10 \text{ A} \quad U = -100 \text{ V}$$

$$P = UI = 1000 \text{ W} \quad \text{CAS 4}$$

$P > 0$ le dipôle est récepteur



$$P = -UI$$

Si I et U sont fléchées dans le même sens:

$$I = 10 \text{ A} \quad U = 100 \text{ V}$$

$$P = -UI = -1000 \text{ W} \quad \text{CAS 2}$$

$P < 0$ le dipôle est générateur

$$I = 10 \text{ A} \quad U = -100 \text{ V}$$

$$P = -UI = 1000 \text{ W} \quad \text{CAS 1}$$

$P > 0$ le dipôle est récepteur

$$I = -10 \text{ A} \quad U = 100 \text{ V}$$

$$P = -UI = 1000 \text{ W} \quad \text{CAS 4}$$

$P > 0$ le dipôle est récepteur

$$I = -10 \text{ A} \quad U = -100 \text{ V}$$

$$P = -UI = -1000 \text{ W} \quad \text{CAS 3}$$

$P < 0$ le dipôle est générateur

Il y a donc 4 cas de figure possibles

.2.8.7 Corrigé de l'exercice 7

U_1 et I_1 fléchées en sens contraires $P_1=U_1I_1$

$$-500 = U_1 (-5) \quad U_1 = 100 \text{ V}$$

Compte tenu des sens positifs choisis pour les courants, la loi des nœuds s'écrit ici :

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0 \quad I_2 = I_1 + I_3 = -5 + 2 = -3 \text{ A}$$

U_2 et I_2 fléchées en sens contraires $P_2=U_2I_2$

$$180 = U_2 (-3) \quad U_2 = -60 \text{ V}$$

$$U = U_4 - U_2 \quad U_4 = 40 \text{ V}$$

U_4 et I_1 fléchées dans le même sens $P_4 = -U_4I_1$

$$P_4 = -40 (-5) = 200 \text{ W}$$

U_2 et I_3 fléchées dans le même sens $P_3 = -U_2I_3$

$$P_3 = -(-60) 2 = 120 \text{ W}$$

On peut vérifier que $P_1+P_2+P_3+P_4=0$

.2.8.8 Corrigé de l'exercice 8

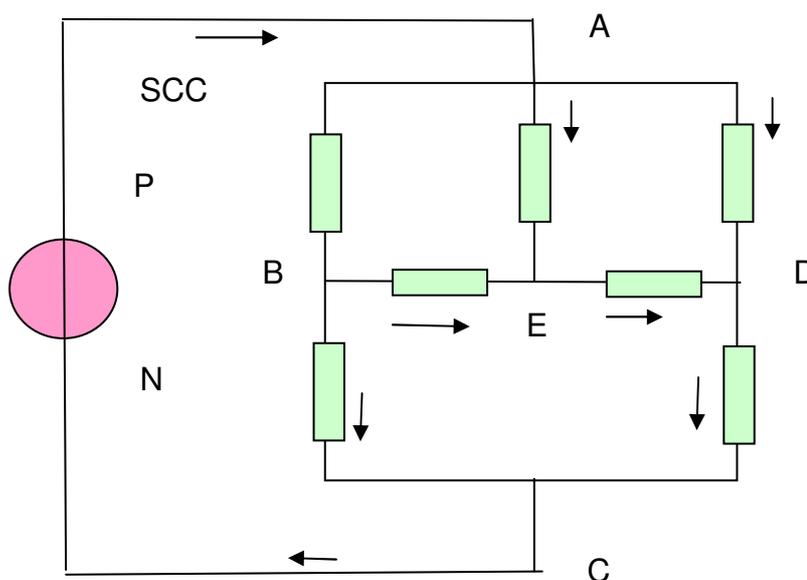
$$U_{AE} = U_{AB} + U_{BE} = 40 + 10 = 50 \text{ V}$$

$$U_{AD} = U_{AE} + U_{ED} = 50 + 6 = 56 \text{ V}$$

$$U_{DC} = U_{DE} + U_{EB} + U_{BC} = -6 - 10 + 20 = 4 \text{ V}$$

$$U_{PN} = U_{AB} + U_{BC} = 40 + 20 = 60 \text{ V}$$

Le courant circule dans chaque résistance dans le sens des potentiels décroissants



Le sens réel de chaque courant (sens conventionnel) a été fléché

.2.8.9 Corrigé de l'exercice 9

Puissance dissipée par effet joule dans le générateur: $p = w / \Delta t$

$$p = - 6000 / 600 = -10 \text{ W}$$

Le générateur est un convertisseur d'énergie. La somme des puissances reçues et fournies par le générateur au milieu extérieur est nulle

$P_{\text{transformée par gén}} + P_{\text{effet Joule ds gén}} + P_{\text{fournie au reste du circuit}} = 0$

$$P_{\text{t}} - 10 - 100 = 0 \quad \text{d'où} \quad P = 110 \text{ W}$$

$P_{\text{t}} = 110 \text{ W}$ représente la puissance totale du générateur (c'est la puissance qu'il reçoit donc >0 et qu'il transforme).

.2.8.10 Corrigé de l'exercice 10

Le moteur est un convertisseur d'énergie. La somme des puissances reçues et fournies par le moteur au milieu extérieur est nulle

La somme des puissances échangées par le moteur est nulle

$P_{\text{elec reçue par le moteur}} = 2000 \text{ W}$

Puissance mécanique fournie par le moteur $- 0,9 \times 2000 = - 1800 \text{ W}$

P_{j} = puissance dissipée par effet joule dans le moteur

$$2000 - 1800 + P_{\text{j}} = 0 \quad \text{d'où} \quad P_{\text{j}} = - 200 \text{ W}$$

Energie dissipée par effet Joule $W = P_{\text{j}} \cdot \Delta t = - 200 \times (3600 + 1200) = - 960\,000 \text{ J}$

soit $- 0,96 \text{ MJ}$

$$W = - 200 \times (4/3) = - 267 \text{ Wh} \quad \text{soit} \quad - 0,267 \text{ kWh}$$

.CHAPITRE 3 CONDUCTEURS OHMIQUES

.3.1 ETUDE D'UN CONDUCTEUR OHMIQUE

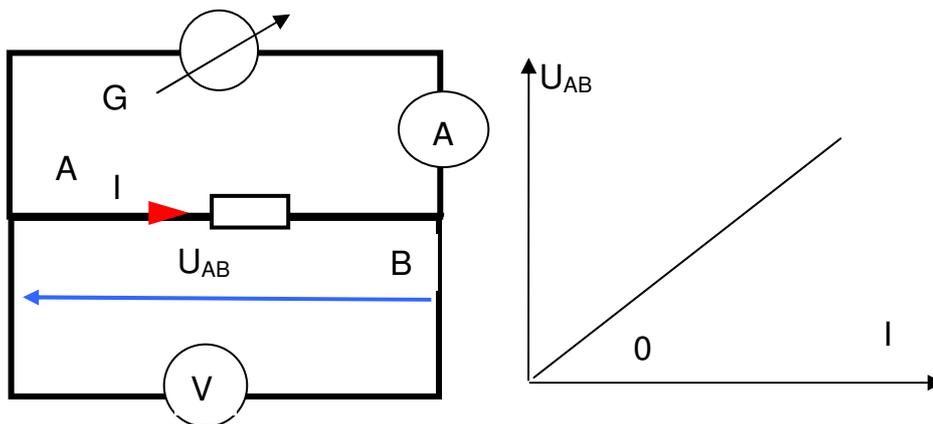
.3.1.1 Définition.

Un conducteur ohmique transforme intégralement en énergie thermique (et rayonnement) l'énergie électrique qu'il consomme. Il est le siège de l'effet Joule

.3.1.2 Caractéristique $U=f(I)$.

G est un générateur fournissant une tension continue réglable.

Pour chaque valeur de la tension appliquée entre A et B, on relève la valeur de l'intensité qui traverse le conducteur ohmique.



La caractéristique de $U_{AB} = f(I)$ est une droite passant par l'origine

exercice 1

.3.1.3 Loi d'Ohm.

Si U_{AB} et I sont fléchées en sens inverses : $U_{AB} = R I$

Si U_{AB} et I sont fléchées en sens inverses : $U_{AB} = - R I$

U en V I en A R en Ω

R dépend des caractéristiques physiques et géométriques du conducteur ohmique : c'est sa résistance

$G = \frac{1}{R}$ G est l'inverse de la résistance du conducteur ohmique : c'est sa conductance

R s'exprime en Ω , G en siemens (S)

La loi d'Ohm s'écrira $U=RI$ ou $I =GU$, I et U étant fléchés en sens inverse.

.3.1.4 Résistance d'un fil métallique cylindrique

La résistance d'un fil, de longueur L, de section S, est donnée par la relation :

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad \rho \text{ est une constante dont la valeur dépend de la nature du métal,}$$

c'est la résistivité.

Unités : R en Ω L en m S en m^2 ρ en $\Omega.m$

La résistance d'un fil cylindrique de longueur L, de diamètre D est donnée par la

$$\text{relation : } R = \rho \frac{4L}{\pi D^2}$$

.3.1.5 Puissance dissipée par effet Joule.

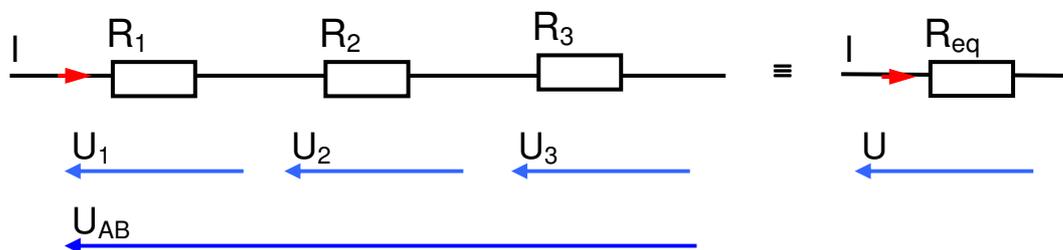
$$P = U_{AB} I = RI.I = RI^2$$

$$P = U_{AB} I = U_{AB} \frac{U_{AB}}{R} = \frac{U_{AB}^2}{R} \qquad P = \frac{U^2}{R} = GU^2$$

□ Exercice 2

.3.2 ASSOCIATION DE CONDUCTEURS OHMIQUES EN SERIE

.3.2.1 Résistance équivalente.



Soit Req la résistance unique équivalente à l'association série

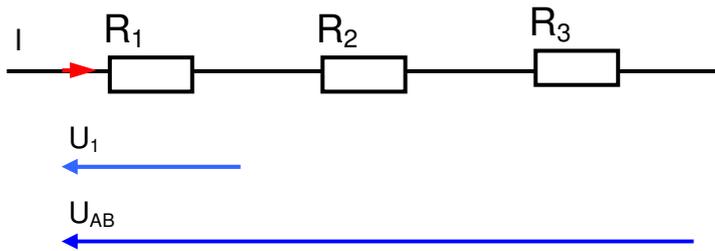
$$U = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I \qquad U = (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I$$

$$U = R_{eq} I$$

d'où pour qu'il y ait équivalence : $R_{eq} = R_1 + R_2 + .. + R_n$ ou $R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$

Remarque : La résistance équivalente est plus grande que la plus grande des résistances associées

.3.2.2 Diviseur de tension



$$I = \frac{U_1}{R_1} = \frac{U}{\sum_{i=1}^n R_i} \Rightarrow U_1 = \frac{R_1}{\sum_{i=1}^n R_i} U$$

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} U \quad U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \dots + R_n} U \quad \text{etc.}$$

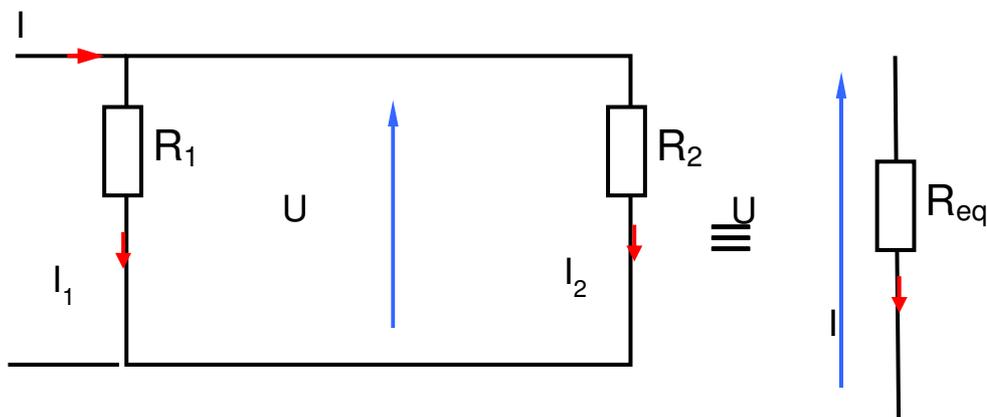
Ces relations ne sont applicables que si les résistances sont en série.

Cette relation du diviseur de tension est très intéressante ; il faut la mémoriser.

exercice 3

.3.3 ASSOCIATION DE CONDUCTEURS OHMIQUES EN DERIVATION

.3.3.1 Association de deux conducteurs ohmiques



Les deux résistances sont soumises à la même tension

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad I_2 = \frac{U}{R_2}$$

$$I = I_1 + I_2 = G_1 U + G_2 U = (G_1 + G_2) U$$

$$I = G_{eq} U$$

d'où pour qu'il y ait équivalence : $G_{eq} = G_1 + G_2$

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \text{d'où} \quad R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Lorsque deux résistances sont montées en dérivation, la résistance équivalente à l'association est égale au produit des deux résistances divisé par leur somme.

Il faut mémoriser cette relation utilisée fréquemment

.3.3.2 Diviseur d'intensité

Les deux résistances sont placées en parallèle.

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \quad I_2 = \frac{U}{R_2}$$

$$I_1 = I - I_2 = I - \frac{U}{R_2} = I - \frac{R_{eq} I}{R_2} = I \left(1 - \frac{R_{eq}}{R_2}\right)$$

$$I_1 = I \left(1 - \frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2) R_2}\right) = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I \quad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$$

La relation du diviseur d'intensité est très importante. on peut énoncer le résultat ainsi :

Lorsque deux résistances sont montées en dérivation, l'intensité du courant qui passe dans une résistance est égale au produit de l'autre résistance par l'intensité du courant principal divisé par la somme des deux résistances.

□ exercice 4

.3.3.3 Association d'un nombre quelconque de conducteurs ohmiques en parallèle.

On démontre facilement que

$$G_{eq} = G_1 + G_2 + \dots + G_n \quad \text{soit} \quad G_{eq} = \sum_{i=1}^n G_i$$

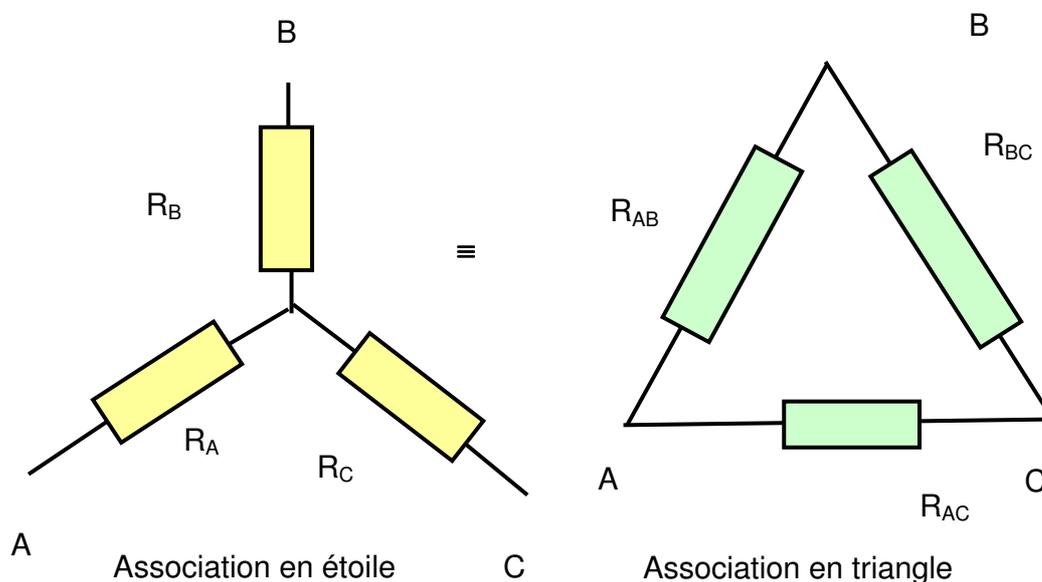
$$\text{ou encore : } \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$

Remarque : en parallèle, la résistance équivalente est plus petite que la plus petite des résistances associées

□ **exercice 5**

.3.4 THEOREME DE KENNELY

Il permet de passer d'un réseau de trois résistances montées en étoile à un réseau de trois résistances montées en triangle et vice versa



.3.4.1 Transformation triangle - étoile

En étoile la résistance équivalente, entre A et B, est $R_A + R_B$; c'est la résistance qu'indiquerait un ohmmètre placé entre A et B, le réseau de résistances n'étant pas connecté à une source.

En triangle, un ohmmètre placé entre A et B indiquerait $\frac{R_{AB}(R_{AC} + R_{BC})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$

R_{AB} est en effet en parallèle avec l'association en série de R_{AC} et de R_{BC}

Si il y a équivalence : $R_A + R_B = \frac{R_{AB}(R_{AC} + R_{BC})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$

En procédant de même entre B et C, on obtient : $R_B + R_C = \frac{R_{BC}(R_{AB} + R_{CA})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$

puis entre A et C : $R_C + R_A = \frac{R_{CA}(R_{BC} + R_{AB})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$

En additionnant membre à membre ces trois relations et en divisant les deux membres par deux :

$$R_A + R_B + R_C = \frac{R_{AB}(R_{AC} + R_{BC}) + R_{BC}(R_{AB} + R_{CA}) + R_{CA}(R_{BC} + R_{AB})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

$$\text{or } R_B + R_C = \frac{R_{BC}(R_{AB} + R_{CA})}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

A partir de ces deux dernières relations on obtient : $R_A = \frac{R_{CA}R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$

Les expressions de R_B et de R_C sont obtenues par permutation circulaire des lettres

$$R_B = \frac{R_{AB}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} \quad R_C = \frac{R_{AC}R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}}$$

.3.4.2 Transformation étoile - triangle

A partir des relations précédentes :

$$R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A = \frac{R_{CA}R_{AB}R_{BC}R_{AB} + R_{BC}R_{BA}R_{CA}R_{BC} + R_{CB}R_{CA}R_{CA}R_{AB}}{(R_{AB} + R_{BC} + R_{CA})^2}$$

or

$$R_{AB}R_C = \frac{R_{AB}R_{CA}R_{CB}}{R_{AB} + R_{BC} + R_{CA}} = \frac{R_{AB}R_{CA}R_{CB}(R_{AB} + R_{BC} + R_{CA})}{(R_{AB} + R_{BC} + R_{CA})^2} =$$

$$R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A$$

$$\text{d'où } R_{AB} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_C}$$

Les deux autres expressions sont obtenues par permutation circulaire des lettres

$$R_{BC} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_A} \quad R_{CA} = \frac{R_A R_B + R_B R_C + R_C R_A}{R_B}$$

□ exercice 6

.3.5 EXERCICES

.3.5.1 □ Exercice 1

Une lampe consomme une puissance de 75 W. Le rendement de la lampe est $\eta = 6\%$.

Calculer l'énergie transformée en énergie thermique pour une durée de fonctionnement de 10 h . Résultat en J et en kWh.

.3.5.2 □ Exercice 2

Critiquer le montage utilisé pour tracer la caractéristique $U=f(I)$. Pourrait-on l'améliorer ?

.3.5.3 □ Exercice 3

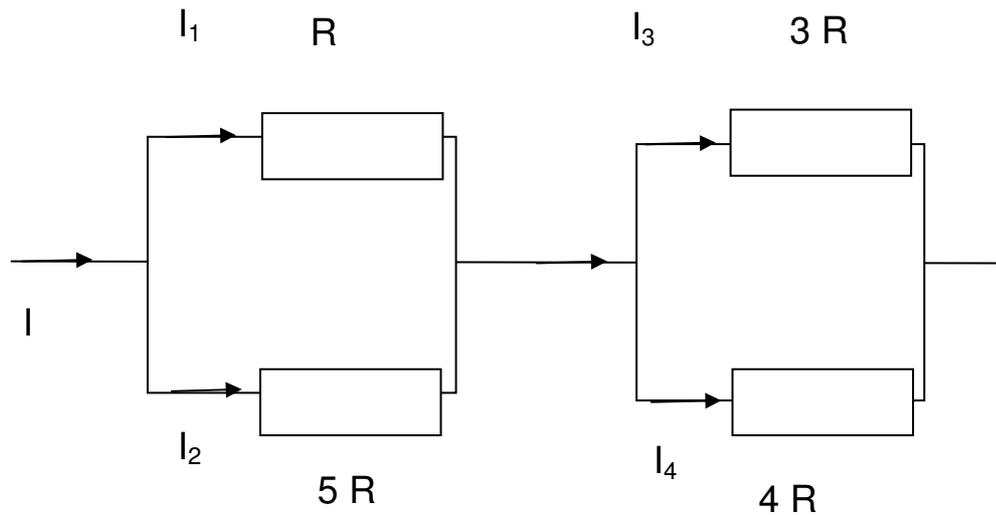
On utilise un montage potentiométrique permettant d'obtenir, à partir d'une tension U continue, une tension U' , réglable et telle que $\frac{U}{20} \leq U' \leq \frac{U}{10}$

Entre quelles positions doit se situer le curseur ?

Quelles sont les limites du dispositif lorsqu'un appareil est alimenté sous la tension U_1 ?

.3.5.4 □ Exercice 4

On considère la portion de circuit représentée . Par application de la relation du diviseur d'intensité, exprimer en fonction de I , les valeurs des intensités des courants pour chaque branche.



.3.5.5 □ Exercice 5

Un étudiant donne le résultat suivant pour la résistance équivalente à trois

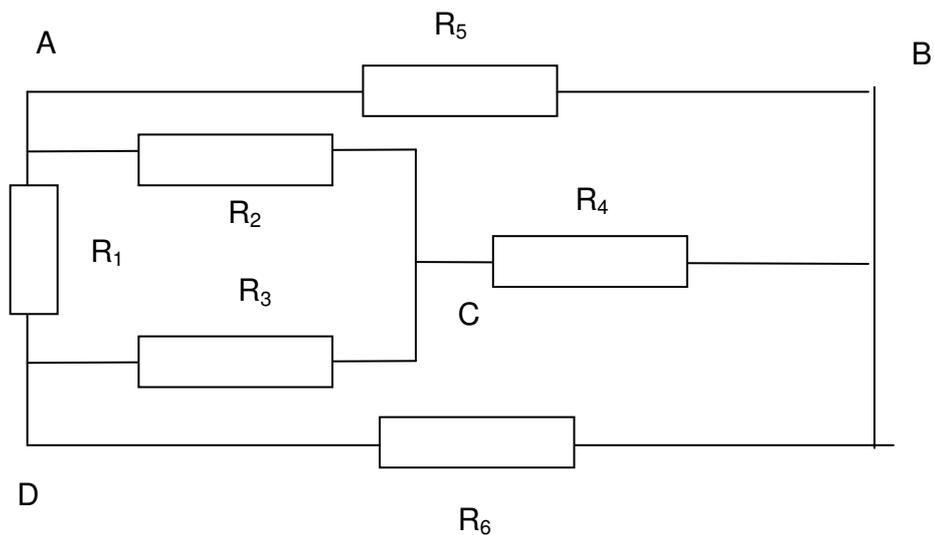
résistances R_1 , R_2 et R_3 montées en dérivation : $R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

Il écrit donc que la résistance équivalente est égale au produit des résistances divisé par leur somme.

Est-ce exact ? Justifier sans aucun calcul

.3.5.6 □ Exercice 6

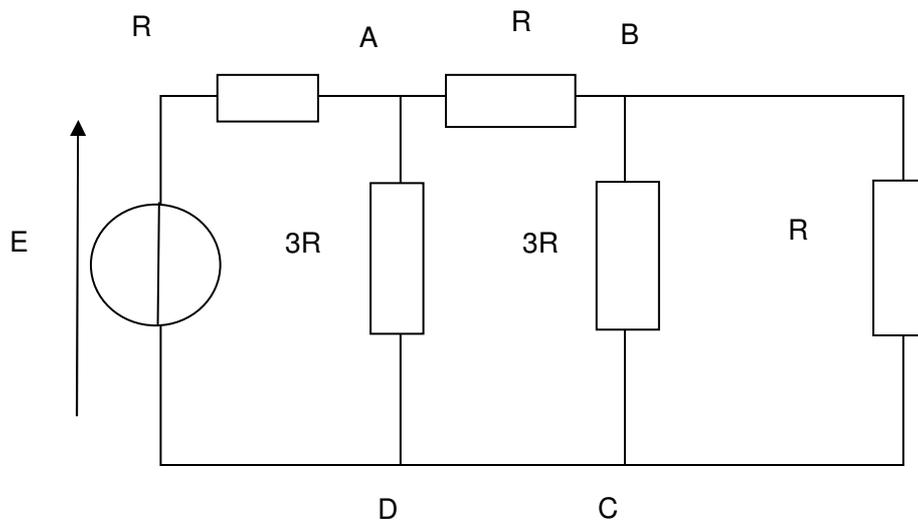
Par application du théorème de Kennely, déterminer la valeur de la résistance équivalente R_{AB}



$$R_1 = 2\Omega \quad R_2 = 3\Omega \quad R_3 = 5\Omega \quad R_4 = 1\Omega \quad R_5 = 5\Omega \quad R_6 = 6\Omega$$

.3.5.7 * Exercice 7

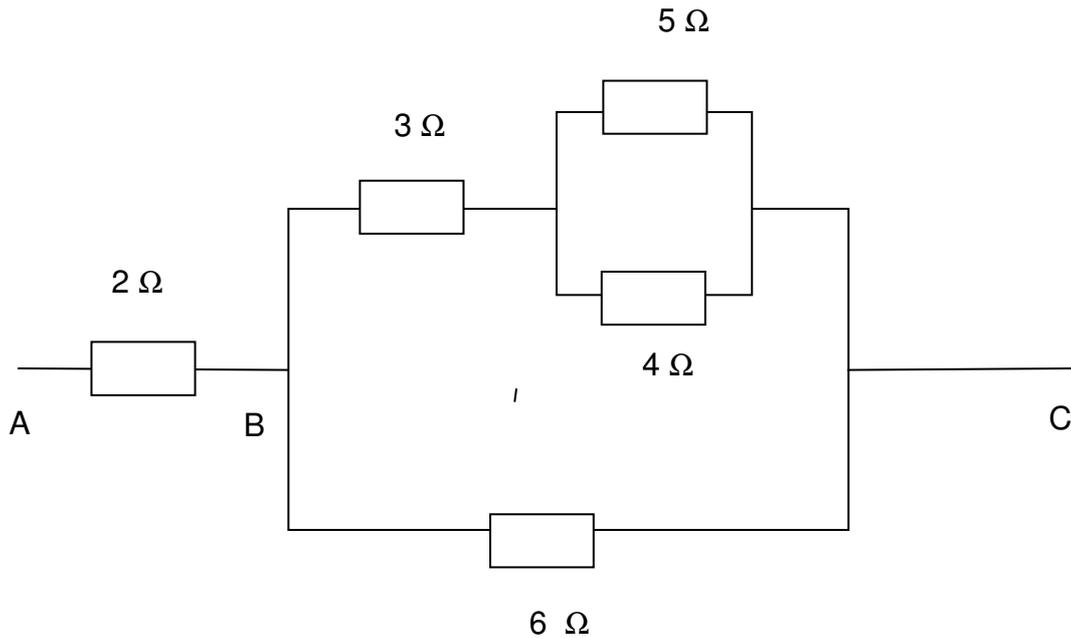
En utilisant la relation du diviseur de tension, établir l'expression de U_{BC} en fonction de E et de R



.3.5.8 * Exercice 8

$$U_{AC} = 24 \text{ V}$$

par application de la relation du diviseur d'intensité, déterminer les valeurs des intensités des courants dans chaque branche



.3.5.9 * Exercice 9

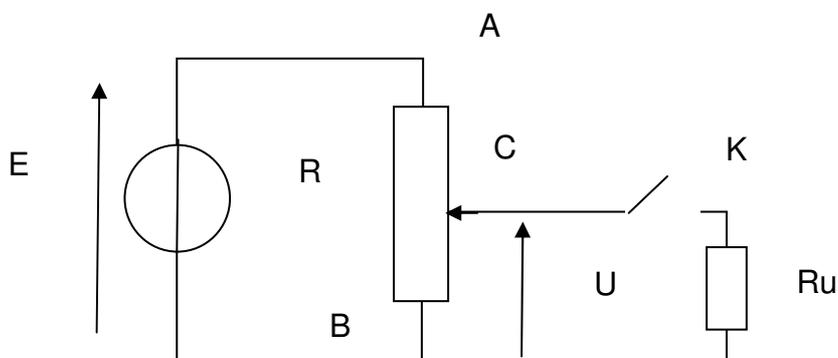
On considère le montage potentiométrique représenté. R est la résistance totale du potentiomètre, xR celle de la fraction de résistance comprise entre B et le curseur du potentiomètre.

$$0 \leq x \leq 1.$$

Exprimer la tension U en fonction de E , x et R lorsque l'interrupteur K est ouvert.

Déterminer pour $x = 0,5$ la valeur de U lorsque l'interrupteur est ouvert puis lorsqu'il est fermé.

$$E = 12 \text{ V} \quad R = 1 \text{ k}\Omega \quad R_u = 0,5 \text{ k}\Omega$$



.3.6 CORRIGES DES EXERCICES

.3.6.1 Corrigé de l'exercice 1

L'énergie électrique consommée pour une durée de fonctionnement Δt est

$$W = P \Delta t$$

L'énergie transformée en chaleur est $-(1-\eta) P \Delta t$

$$W = -(1-0,06) 75 \times 36000 = - 2538000 \text{ J soit } - 2,54 \text{ MJ}$$

$$W = -(1-0,06) 0,075 \times 10 = - 0,705 \text{ kWh}$$

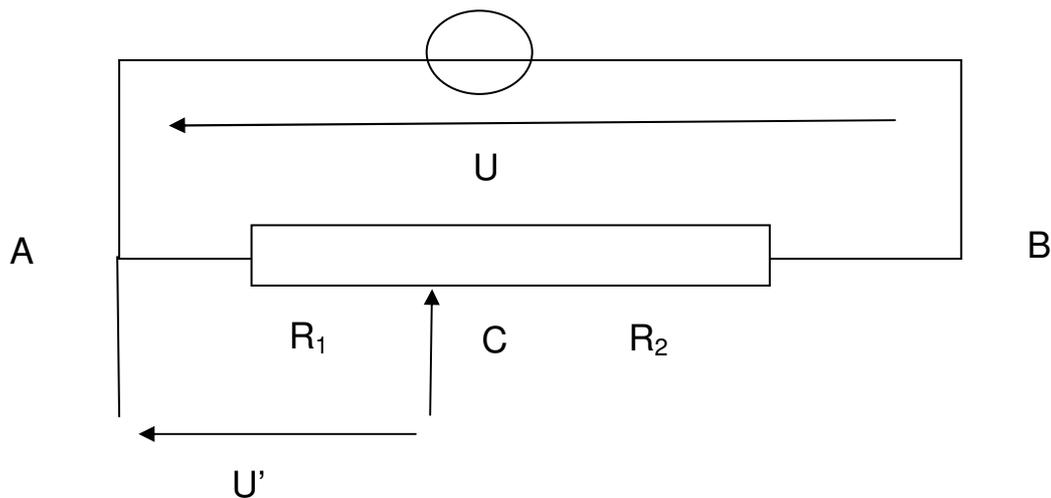
.3.6.2 Corrigé de l'exercice 2

L'intensité du courant lue sur l'ampèremètre est la somme des intensités des courants dans la résistance et dans le voltmètre. Si le voltmètre est d'excellente qualité (résistance infinie) on pourra assimiler l'intensité du courant à l'intensité lue.

Si on modifie le schéma en plaçant le voltmètre aux bornes de l'ensemble (résistance + ampèremètre), l'intensité lue sur l'ampèremètre sera rigoureusement celle qui traversera la résistance mais la tension lue sur le voltmètre ne sera pas la tension aux bornes de la résistance. Néanmoins, les résultats seront acceptables si la résistance de l'ampèremètre est très faible.

On voit dans cet exemple, dans les deux montages, qu'un appareil de mesure peut perturber le circuit dans lequel il est introduit. Les mesures seront entachées d'erreurs dues à la méthode de mesure.

.3.6.3 Corrigé de l'exercice 3



Lorsque le curseur est en C, il partage la résistance R en deux résistances R_1 et R_2 .

La loi du diviseur de tension nous permet d'écrire :

$$\frac{U'}{U} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad R = R_1 + R_2 = \text{constante}$$

Il faudra donc déplacer le curseur entre les points C_1 et C_2 tels que

$$\frac{U}{20} \leq U' \leq \frac{U}{10} \Rightarrow \frac{1}{20} \leq \frac{U'}{U} \leq \frac{1}{10} \quad \frac{1}{20} \leq \frac{R_1}{R} \leq \frac{1}{10}$$

Cette condition sera rigoureusement vérifiée si le système fonctionne à vide, c'est-à-dire s'il n'y a aucun appareil branché entre A et C.

S'il fonctionne en charge, les positions du curseur permettant de vérifier

$$\frac{U}{20} \leq U' \leq \frac{U}{10}$$

seront modifiées sauf si la charge placée entre A et C est telle que l'intensité du courant qui la parcourt est négligeable.

La relation du diviseur de tension ne s'applique rigoureusement que si R_1 et R_2 sont parcourues par un courant de même intensité

.3.6.4 Corrigé de l'exercice 4

$$I_1 = I \frac{5R}{R+5R} = \frac{5}{6} I \quad I_2 = I \frac{R}{R+5R} = \frac{1}{6} I$$

$$I_3 = I \frac{4R}{3R+4R} = \frac{4}{7} I \quad I_4 = I \frac{3R}{3R+4R} = \frac{3}{7} I$$

.3.6.5 Corrigé de l'exercice 5

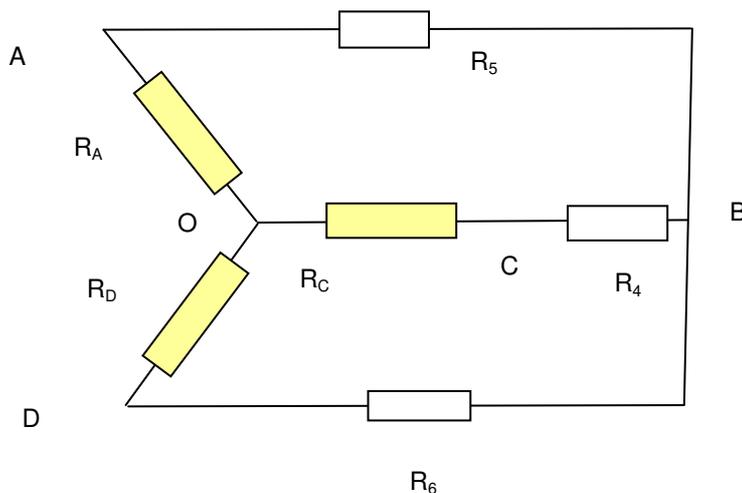
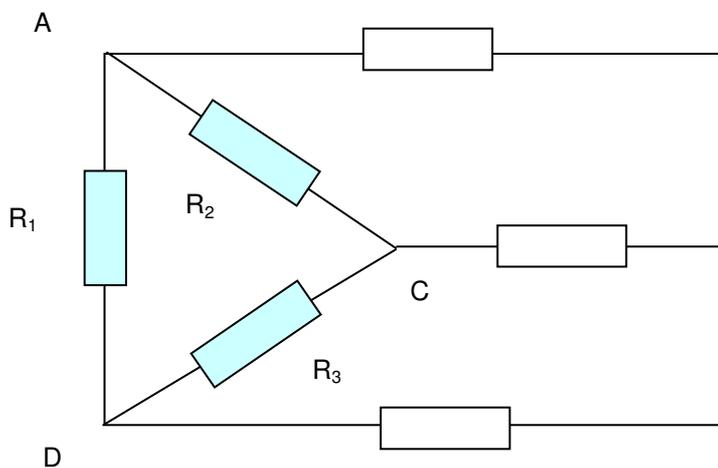
$R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$ Cette réponse est fautive. L'analyse dimensionnelle montre

que R_{eq} a la dimension d'une résistance au carré.

La résistance équivalente n'est égale au produit sur la somme uniquement dans le cas de deux résistances en parallèle.

La relation exacte est $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$ d'où $R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$

.3.6.6 Corrigé de l'exercice 6



En les points A, C et D, on effectue une transformation étoile triangle :

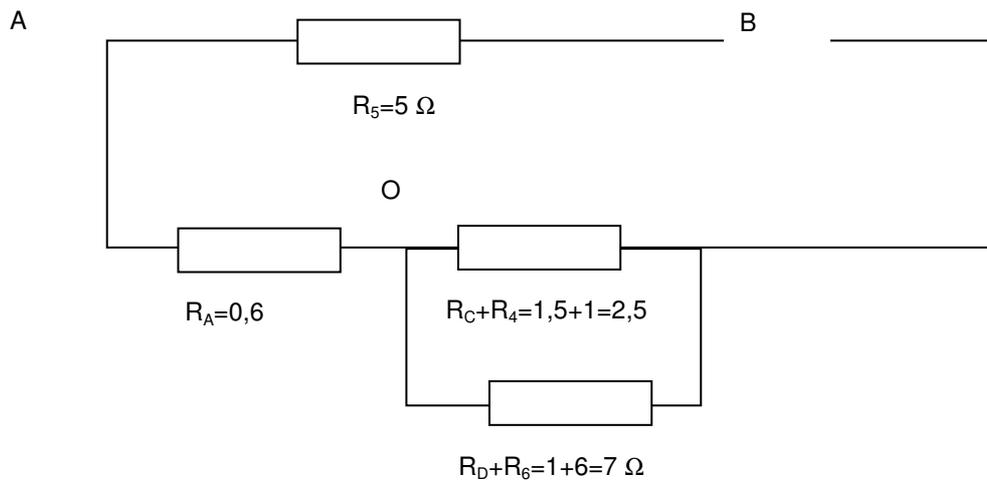
$$R_A = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 0,6 \Omega$$

$$R_C = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 1,5 \Omega$$

$$R_D = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 1 \Omega$$

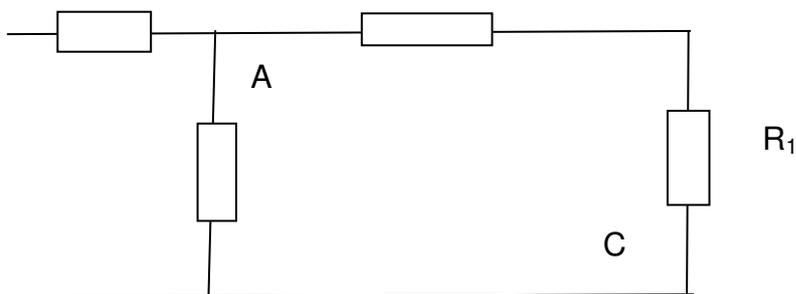
Les valeurs des résistances sont indiquées sur le schéma.

$$R_{AB} = \frac{5 \left(0,6 + \frac{2,5 \times 7}{2,5 + 7} \right)}{5 + \left(0,6 + \frac{2,5 \times 7}{2,5 + 7} \right)} = 1,64 \Omega$$

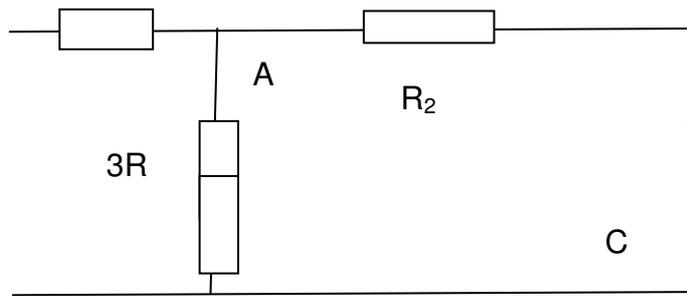


.3.6.7 Corrigé de l'exercice 7

Soit R_1 la résistance équivalente à R et $3R$ en // $R_1 = 0,75 R$

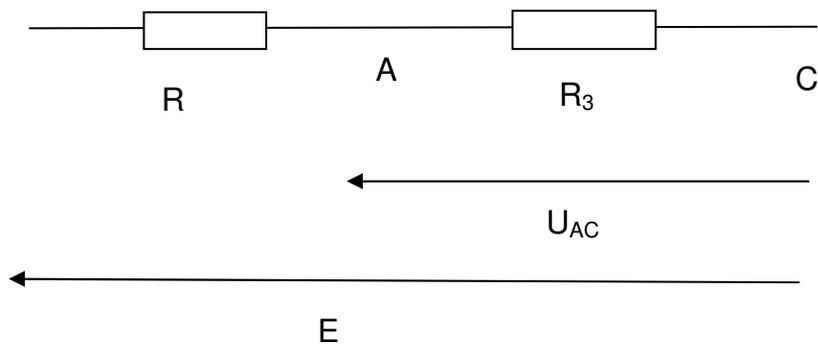


Soit R_2 la résistance équivalente à R_1 et R en série $R_2 = 1,75 R$



Soit R_3 la résistance équivalente à R_2 et $3R$ en //

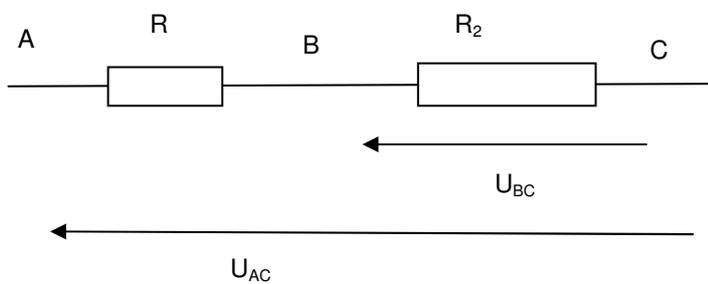
$$R_3 = \frac{1,75R \cdot 3R}{1,75R + 3R} = \frac{5,25}{4,75} R$$



La relation du diviseur de tension permet d'écrire

$$U_{AC} = \frac{R_3}{R + R_3} E = \frac{\frac{5,25R}{4,75}}{R + \frac{5,25R}{4,75}} E = \frac{5,25}{10} E$$

$$U_{AD} = U_{AC}$$



La relation du diviseur de tension permet d'écrire

$$U_{BC} = \frac{R_2}{R + R_2} U_{AC}$$

$$U_{BC} = \frac{R_2}{R + R_2} U_{AC} = \frac{0,75R}{R + 0,75R} \frac{5,25}{10} E = 0,225 E$$

.3.6.8 Corrigé de l'exercice 8

La résistance équivalente à l'association des résistances de 4 Ω et de 5 Ω est $20/9=2,22 \Omega$

La résistance équivalente à l'association des résistances de 3 Ω , 4 Ω et de 5 Ω est 5,22 Ω

La résistance équivalente à l'association des résistances de 6 Ω , 3 Ω , 4 Ω et de

$$5 \Omega \text{ est } \frac{5,22 \times 6}{5,22 + 6} = 2,79 \Omega$$

$$R_{AC} = 2,79 + 2 = 4,79 \Omega$$

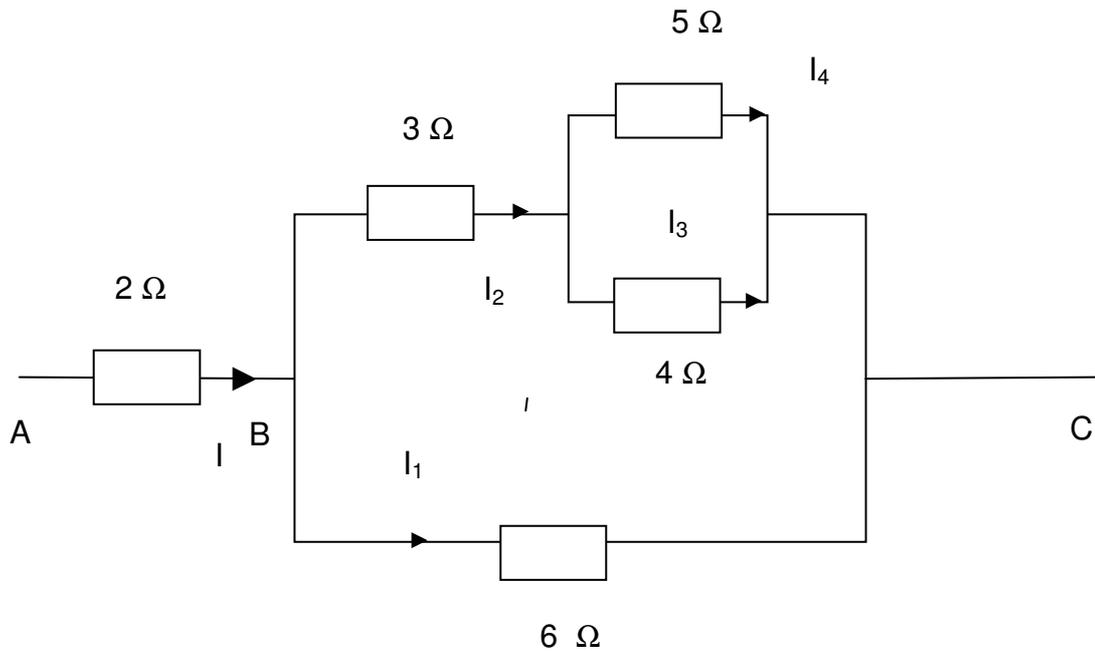
La relation du diviseur d'intensité permet d'écrire:

$$I = \frac{24}{4,79} = 5,01 \text{ A}$$

$$I_1 = \frac{5,22}{5,22 + 6} I = \frac{5,22}{11,22} 5,01 = 2,33 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{6}{5,22 + 6} I = \frac{6}{11,22} 5,01 = 2,68 \text{ A}$$

$$I_3 = \frac{5}{4 + 9} 2,68 = 1,49 \text{ A} \quad I_4 = \frac{4}{4 + 5} 2,68 = 1,19 \text{ A}$$

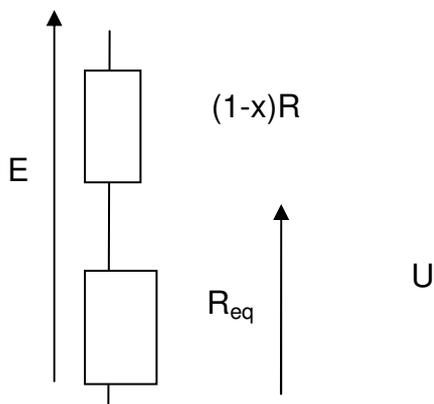


.3.6.9 Corrigé de l'exercice 9

D'après la relation du diviseur de tension : $U = \frac{xR}{R} E$

Lorsque K est ouvert, pour $x=0,5$ $U=0,5 E$

Lorsque K est fermé, si on appelle R_{eq} la résistante équivalente à xR et R_u en parallèle, en appliquant la relation du diviseur de tension :



$$R_{eq} = \frac{xR R_u}{xR + R_u}$$

$$U = \frac{R_{eq}}{R_{eq} + (1-x)R} E$$

$$U = \frac{\frac{xR R_u}{xR + R_u}}{\frac{xR R_u}{xR + R_u} + (1-x)R} E = \frac{xR R_u}{xR R_u + (1-x)R(xR + R_u)} E$$

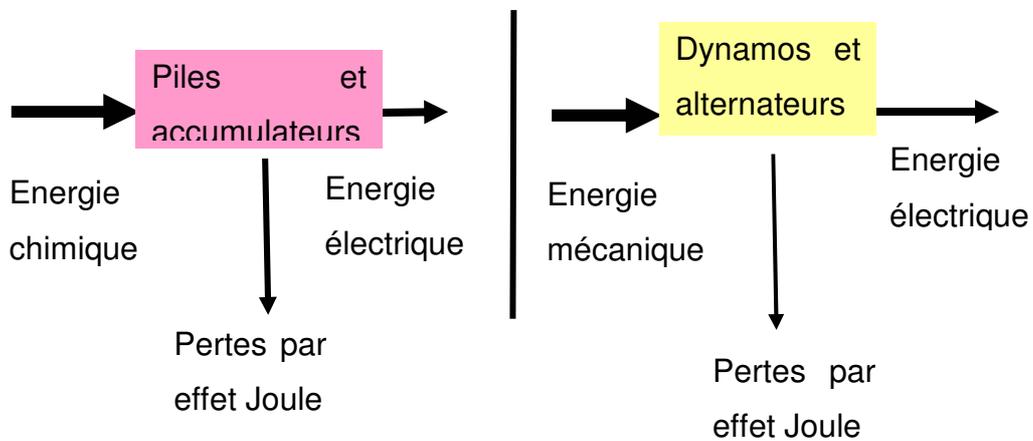
$$U = \frac{0,5Ru}{0,5Ru + 0,5(0,5R + Ru)} E = \frac{500}{500 + (500 + 500)} E = \frac{E}{3}$$

.CHAPITRE 4 GENERATEURS ET RECEPTEURS ELECTRIQUES

.4.1 GENERATEURS.

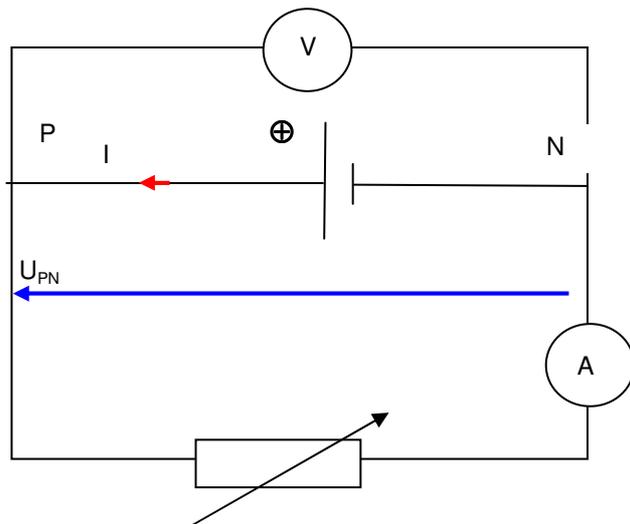
.4.1.1 Définition

Les piles, les accumulateurs, les dynamos et les alternateurs sont les principaux générateurs électriques. Tous transforment de l'énergie en énergie électrique.



.4.1.2 Caractéristique $u=f(i)$.

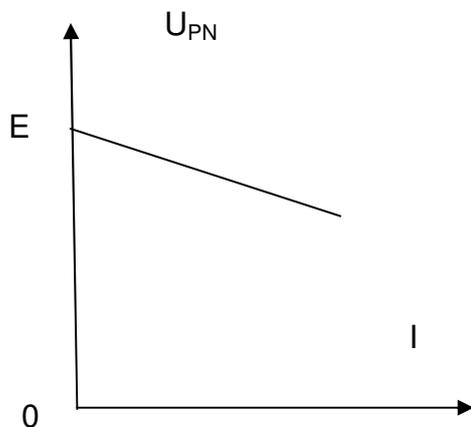
I et U_{PN} sont fléchées dans le même sens et sont ici des grandeurs positives



On fait débiter le générateur sur une résistance réglable. Pour chaque valeur de l'intensité du courant débité I on relève celle de U_{PN}

La courbe représentative de la fonction $U_{PN}=f(I)$ est une droite d'équation

$$U_{PN} = E - rI \quad \text{où toutes les grandeurs sont positives}$$



E est la tension à vide ou force-électromotrice du générateur (E en V)
 r est la résistance interne du générateur (r en Ω)

$$U_{PN} = E - rI$$

La tension U_{PN} aux bornes du générateur est égale à E lorsque le générateur ne débite pas. Dès que le générateur débite un courant, la tension diminue à cause de la résistance interne du générateur.

Dans le cas d'une dynamo, E n'est constante que si la fréquence de rotation l'est.

Nous pourrions continuer à utiliser des grandeurs arithmétiques si nous ne traitions que des problèmes simples en continu. Pour résoudre des problèmes

plus complexes en continu et surtout en régime variable, notamment en régime sinusoïdal, il faut algébriser les grandeurs

□ Exercice 1

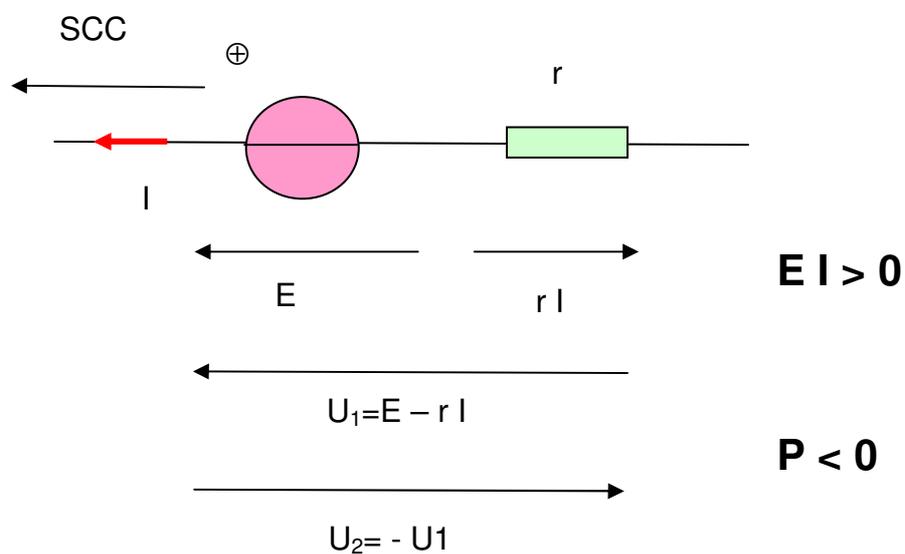
.4.1.3 Loi d'Ohm algébrisée

Convention :

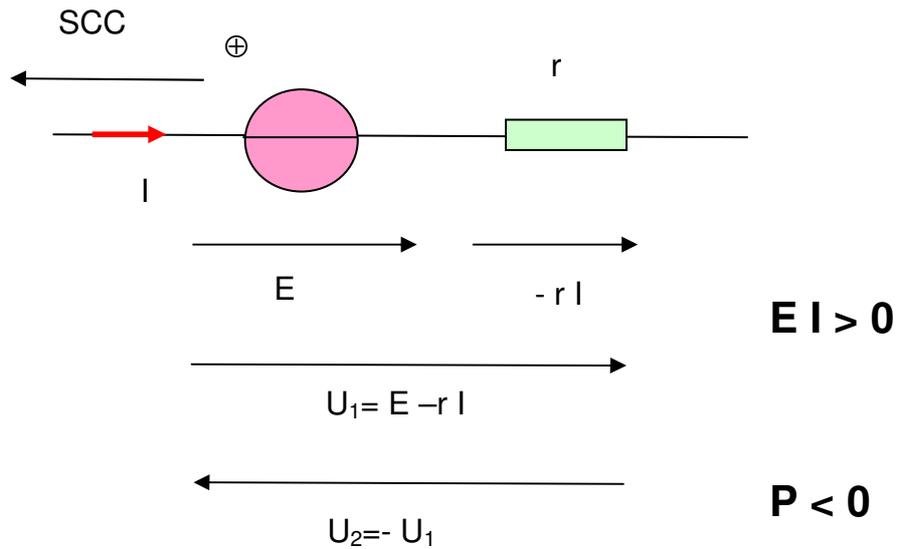
I, E et U sont des réels

E et I sont fléchées dans le même sens

.4.1.3.1 Cas 1 : E et I sont positifs



.4.1.3.2 Cas 2 : E et I sont négatifs



.4.1.4 Bilan énergétique

Si U et I sont fléchées dans le même sens

La puissance échangée entre le générateur et le reste du circuit est

$$P = -UI$$

$$U = E - rI$$

$$P = -UI = -(E - rI)I = -EI + rI^2$$

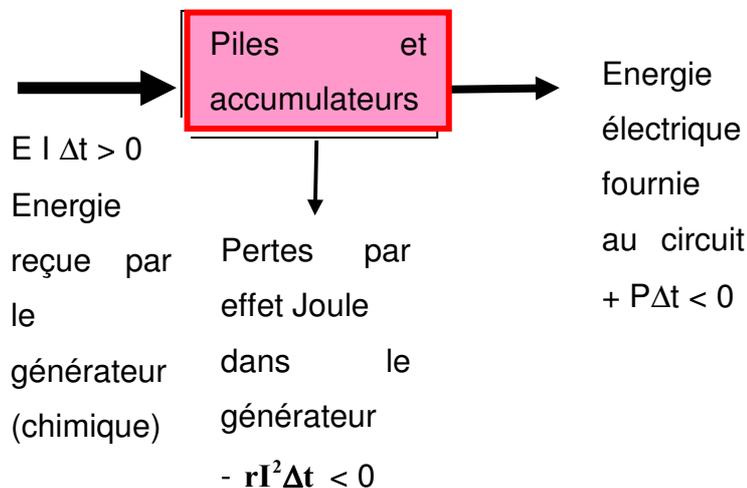
$$P = -EI + rI^2 \text{ les termes s'expriment en W}$$

En multipliant par la durée de passage du courant on obtient :

$$P\Delta t = -EI\Delta t + rI^2\Delta t \text{ tous les termes s'expriment en J}$$

$$EI\Delta t + P\Delta t - rI^2\Delta t = 0 \text{ Cette relation traduit la conservation de l'énergie}$$

Le produit EI est positif et P est < 0



Si U et I sont fléchées en sens contraires

La puissance échangée entre le générateur et le reste du circuit est

$$P = UI$$

$$P = (-E + rI)I = -EI + rI^2$$

Le produit EI est positif $P < 0$

$$EI\Delta t = -P\Delta t + rI^2\Delta t \quad EI\Delta t + P\Delta t - rI^2\Delta t = 0$$

□ Exercice 2

.4.1.5 Rendement

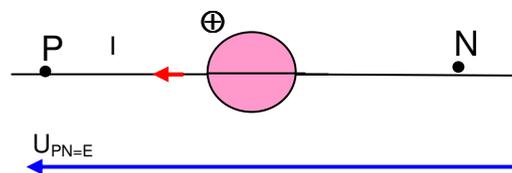
Le rendement énergétique du générateur

$$\eta = \frac{|\text{énergie fournie au circuit}|}{|\text{énergie totale transformée}|} = \frac{|-P\Delta t|}{|EI\Delta t|} = \frac{|-(\mp UI\Delta t)|}{|EI\Delta t|} = \frac{|U|}{|E|}$$

$$\eta = \frac{|U|}{|E|} \quad \eta < 1$$

.4.1.6 Générateur parfait

Le générateur parfait n'aurait pas de résistance interne : $U=E$



Le rendement d'un générateur parfait serait égal à 1.

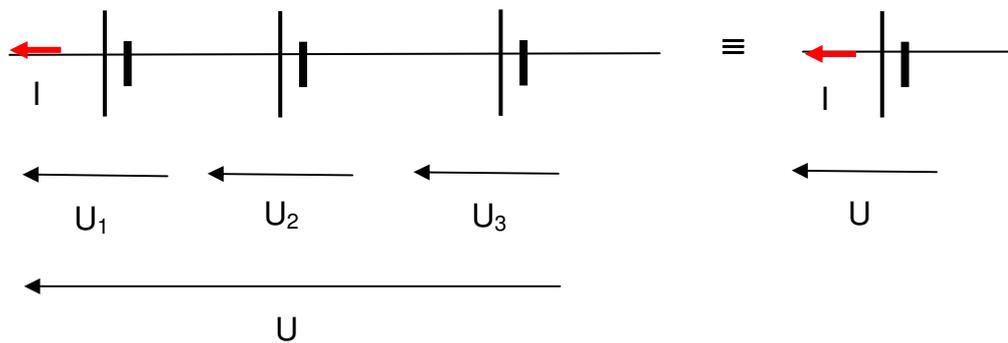
□ Exercice 3

.4.2 ASSOCIATION DE GENERATEURS

.4.2.1 Association en série

.4.2.1.1 Cas où les générateurs ont des caractéristiques différentes

L'ensemble des générateurs en série est équivalent à un générateur unique de force électromotrice E_{eq} et de résistance interne r_{eq} .



$$U = E_1 - r_1 I + E_2 - r_2 I + E_3 - r_3 I$$

$$U = E_{eq} - r_{eq} I$$

l'équivalence implique que l'intensité débitée et la tension aient mêmes valeurs dans les deux schémas.

$$E_{eq} = E_1 + E_2 + E_3$$

$$r_{eq} = r_1 + r_2 + r_3$$

On peut généraliser à une association de n générateurs :

$$E_{eq} = \sum_{i=1}^n E_i \quad r_{eq} = \sum_{i=1}^n r_i$$

.4.2.1.2 Cas où les générateurs ont des caractéristiques identiques

Si les n générateurs sont identiques et ont pour force électromotrice E et pour résistance interne r

$$E_{eq} = nE \quad r_{eq} = nr$$

Le montage a pour intérêt d'obtenir une grande force électromotrice mais la résistance équivalente est la somme des résistances.

.4.2.2 Association en dérivation de générateurs identiques

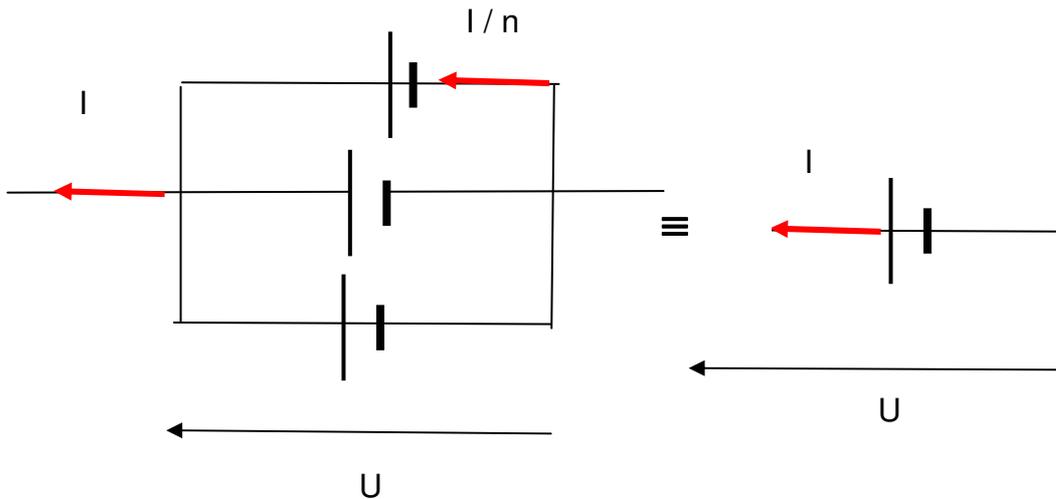
Chaque générateur a pour force électromotrice e et pour résistance interne r

Chaque générateur débite un courant d'intensité I / n

La tension est la même aux bornes de chaque générateur.

$$U = E - r \frac{I}{n} \quad U = E_{eq} - r_{eq} I$$

$$E_{eq} = E \quad r_{eq} = \frac{r}{n}$$

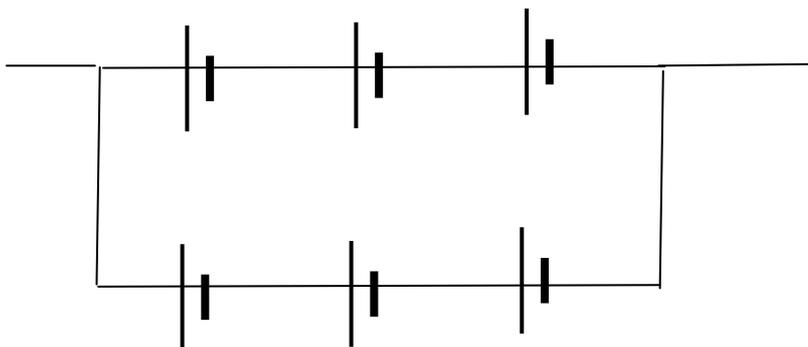


Ce montage ne permet pas d'augmenter la fem mais permet d'avoir une intensité d'autant plus élevée que le nombre de générateurs est plus grand.

.4.2.3 Montage mixte

Si l'on veut un générateur de force électromotrice élevée, pouvant débiter un courant d'intensité élevée, il faudra utiliser le compromis du montage mixte.

On réalise l'association en dérivation de p ensembles comprenant chacun n générateurs identiques en série



Dans le cas de figure : $p=2$ et $n=3$

On montre facilement en utilisant les résultats précédents que :

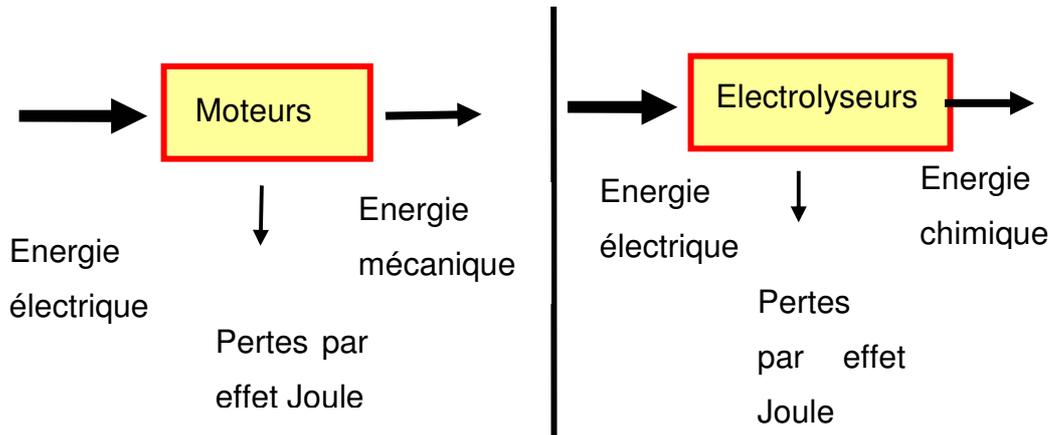
- chaque branche est équivalente à un générateur unique de force électromotrice nE et de résistance interne nr
- l'ensemble de l'association mixte est équivalent à un générateur de force

électromotrice nE et de résistance interne $r_{eq} = \frac{nr}{p}$

.4.3 RECEPTEURS

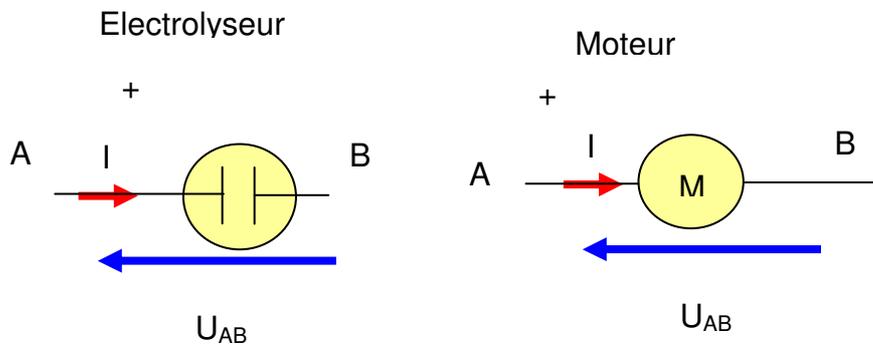
.4.3.1 Définition

Les moteurs et électrolyseurs sont, comme les conducteurs ohmiques, des récepteurs mais ils transforment l'énergie électrique reçue en d'autres formes d'énergie que chaleur et rayonnement.



.4.3.2 Caractéristique $U=f(I)$.

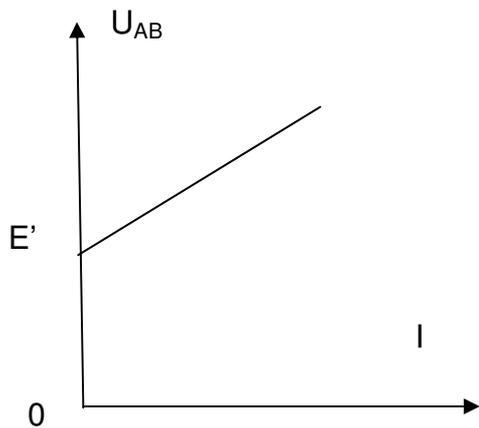
I et U sont fléchées en sens contraires.



A l'aide d'un générateur fournissant une tension réglable, on alimente le récepteur. Pour chaque valeur de U_{AB} on note la valeur de I correspondante.

La courbe représentative de la fonction $U_{AB}=f(I)$ est une droite d'équation

$$U_{AB} = E' + r' I \quad \text{où toutes les grandeurs sont positives}$$



E' 'est la force contre-électromotrice du récepteur (E' en V)

r' 'est la résistance interne du générateur (r' en Ω)

$$U_{AB} = E' + r'I$$

Dans le cas d'un moteur, E' n'est constante que si la fréquence de rotation ne varie pas.

De même que pour les générateurs, il est nécessaire d'algébriser les grandeurs

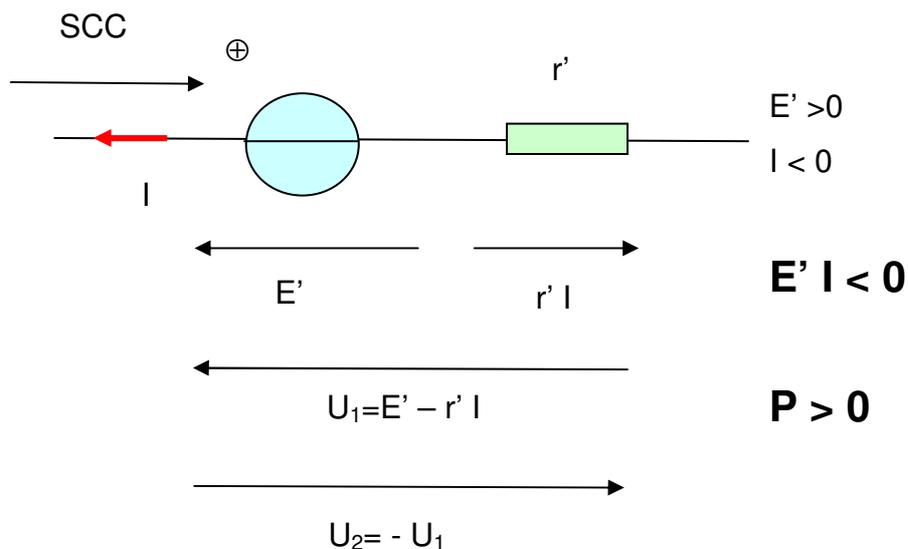
.4.3.3 Loi d'Ohm algébrisée

Conventions :

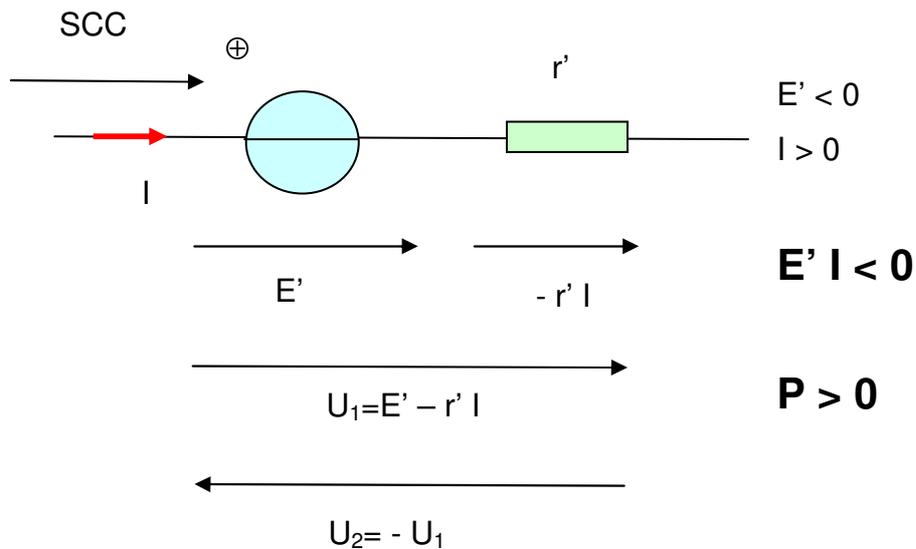
I , E' et U sont des réels

E' et I sont fléchées dans le même sens

.4.3.3.1 Cas 1 : $E' > 0$ et $I < 0$



.4.3.3.2 Cas 2 : $E' < 0$ et $I > 0$



.4.3.4 Bilan énergétique

si U est fléchée dans le même sens que I

La puissance échangée entre le récepteur et le reste du circuit est

$$P = -UI$$

$$-UI = -E'I + r'I^2 \quad \text{tous les termes sont des puissances}$$

$$P\Delta t + E'I\Delta t - r'I^2\Delta t = 0 \quad \text{tous les termes sont des énergies.}$$

$$P\Delta t + E'I\Delta t - r'I^2\Delta t = 0 \quad \text{Cette relation traduit la conservation de l'énergie}$$

$$E'I \text{ est } < 0 \quad P > 0$$

si U est fléchée en sens contraire de I

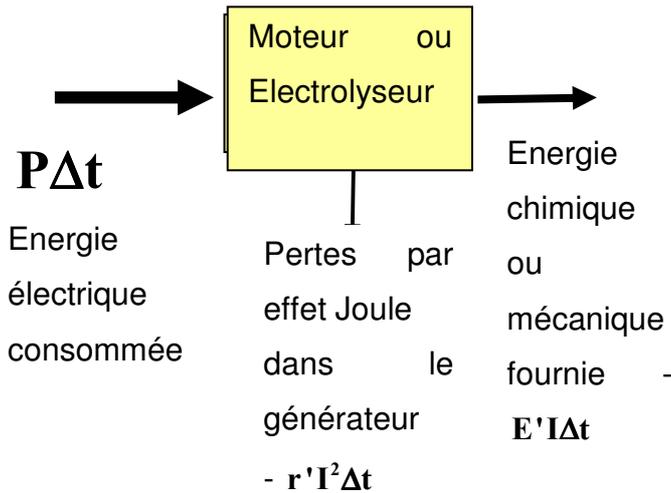
La puissance échangée entre le récepteur et le reste du circuit est

$$P = UI$$

$$P = (-E' + r'I) I = -E'I + r'I^2$$

$$E'I \text{ est } < 0 \quad P > 0$$

$$P\Delta t + E'I\Delta t - r'I^2\Delta t = 0$$



□ Exercice 4

.4.3.5 Rendement

Le rendement énergétique est :

$$\eta = \frac{|\text{énergie utile (chim ou méca)}|}{|\text{énergie électrique reçue}|} = \frac{|-E' I \Delta t|}{|U I \Delta t|}$$

$$\eta = \left| \frac{E'}{U} \right| \quad \eta < 1$$

□ Exercice 5

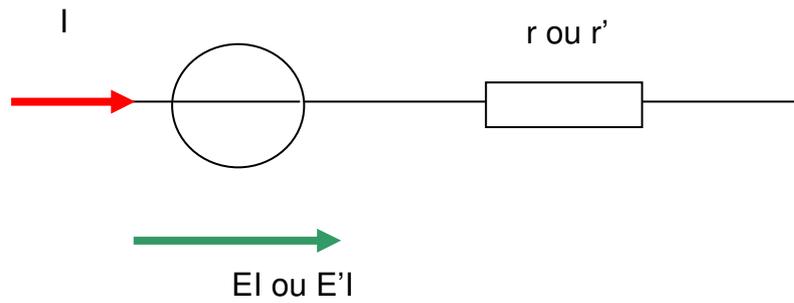
.4.4 GENERALISATION DE LA LOI D'OHM AUX GENERATEURS ET RECEPTEURS

On peut donner l'expression générale de la tension aux bornes d'un dipôle, quelle que soit sa nature, à condition qu'il ait une caractéristique $U=f(I)$ qui soit une droite et que les conventions suivantes soient respectées.

.4.4.1 Convention :

I, E, E' et U sont des réels

E et E' sont fléchées dans le même sens que I



GENERATEUR : $E I > 0$ $P < 0$

RECEPTEUR $E' I < 0$ $P > 0$

.4.4.2 Cas d'un générateur

$$E I > 0 \quad P < 0$$

Si $E > 0$ $I > 0$ $E I > 0$ $P < 0$ si $r I^2 < E I$ si le dipôle fonctionne en générateur.

Si $E < 0$ $I < 0$ $E I > 0$ $P < 0$ si $r I^2 < E I$ si le dipôle fonctionne en générateur.

.4.4.3 Cas d'un récepteur (moteur ou électrolyseur).

$$E' I < 0 \quad P > 0$$

$$\text{Si } E' > 0 \quad I < 0 \quad E I < 0 \quad P = -E' I + r I^2 \quad P > 0$$

$$\text{Si } E' < 0 \quad I > 0 \quad E I < 0 \quad P = -E' I + r I^2 \quad P > 0$$

.4.4.4 Cas d'un conducteur ohmique.

Si U et I sont fléchés dans le même sens $U = -R I$ que I soit > 0 , < 0 ou $= 0$

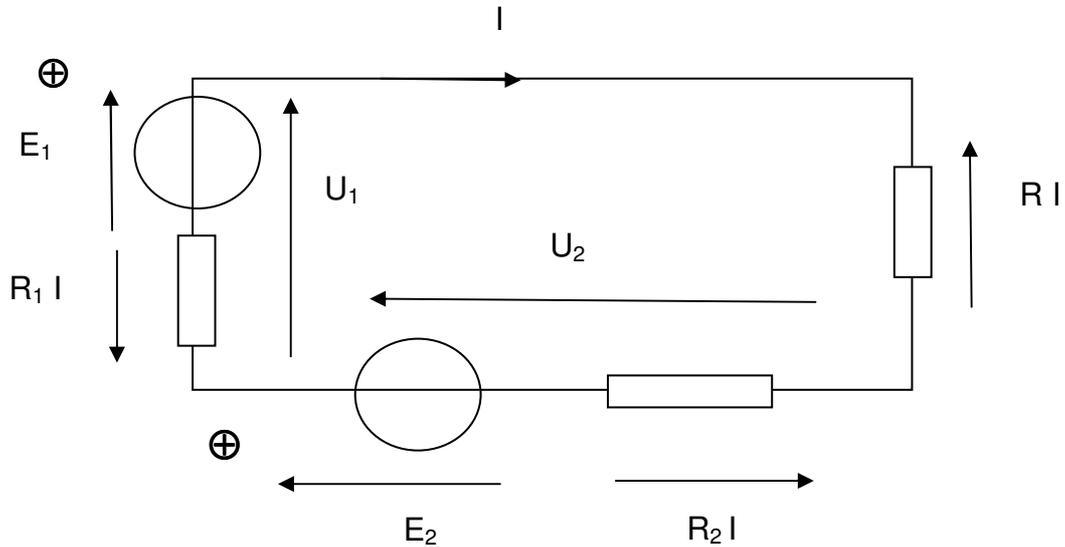
Si U et I sont fléchés en sens contraires, $U = R I$ que I soit > 0 , < 0 ou $= 0$

.4.4.5 Remarque :

Le lecteur est naturellement libre d'orienter les tensions comme il le veut.

.4.5 UN GENERATEUR QUI A UN ETRANGE COMPORTEMENT

On réalise le circuit suivant ;



Il comprend deux générateurs montés en série et une résistance R

$$E_1=20 \text{ V} \quad E_2= 2 \text{ V} \quad R_1= 2 \Omega \quad R_2= 20 \Omega \quad R=3 \Omega$$

$$\text{D'après la loi de Pouillet ; } I = \frac{\sum E}{\sum R} = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2 + R} \quad I = \frac{20 + 2}{2 + 20 + 3} = 0,88 \text{ A}$$

$$E_1 I = 17,6 \text{ W} \quad R_1 I^2 = 1,54 \text{ W}$$

$$P_1 = -U_1 I = -(E_1 - R_1 I) I = -E_1 I + R_1 I^2$$

$$P_1 = -17,6 + 1,54 \approx -16,1 \text{ W} \quad P_1 < 0$$

Le dipôle 1 est bien un générateur ; Le courant sort du pôle + du générateur, $E_1 I > 0$, $P_1 < 0$.

$$E_2 I = 1,76 \text{ W} \quad R_2 I^2 = 15,48 \text{ W}$$

$$P_2 = -U_2 I = -(E_2 - R_2 I) I = -E_2 I + R_2 I^2$$

$$P_2 = -1,76 + 15,48 \approx 13,7 \text{ W} \quad P_2 > 0$$

Le courant sort du pôle + du dipôle 2, $E_2 I > 0$ mais $P_2 < 0$ ce qui fait qu'il s'agit d'un comportement en récepteur.

Le dipôle 2 se comporte comme un générateur en ce qui concerne les polarités mais du point de vue énergétique, il consomme plus d'énergie qu'il n'en fournit et joue le rôle de récepteur.

$$P_3 = R I^2 = 3 \times 0,88 \approx 2,6 \text{ W}$$

On vérifie bien que $P_1 + P_2 + P_3 = 0$

Conclusion :

$P < 0$ est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un dipôle soit générateur.

$E I > 0$ est une condition nécessaire mais non suffisante pour qu'un dipôle soit générateur.

.4.6 UN GENERATEUR PEUT-IL SE COMPORTE EN RECEPTEUR ?

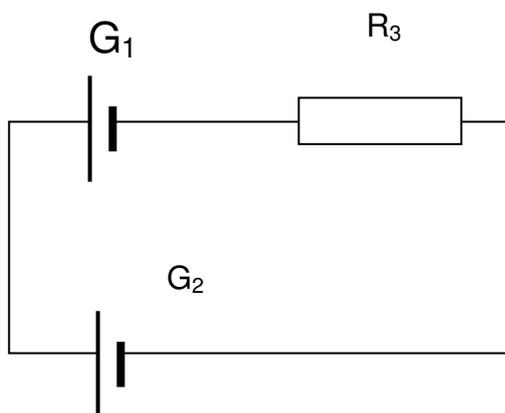
Le problème se pose lorsque plusieurs générateurs se trouvent dans un même circuit.

.4.6.1 Exemple.

Un circuit série est composé de deux générateurs G_1 (E_1 ; 2Ω) et G_2 (8 V ; 3Ω) montés en opposition et d'un conducteur ohmique R_3 ($R_3=10 \Omega$).

On se propose d'étudier le fonctionnement de ce circuit lorsque E_1 varie de 12 à 4 V .

.4.6.2 Schéma



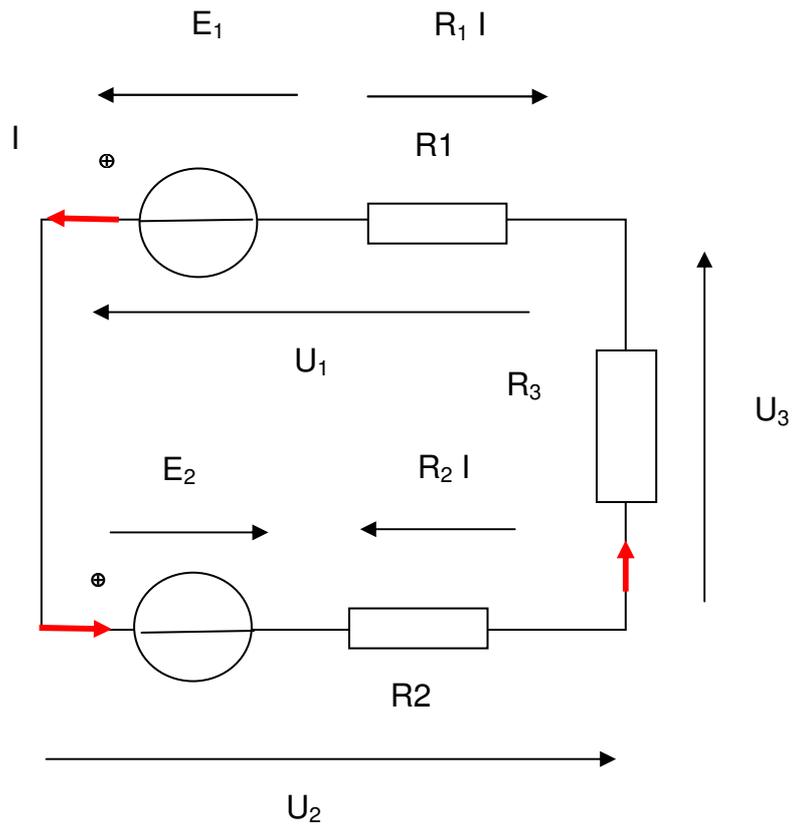
.4.6.3 Schéma équivalent.

On définit un sens positif pour l'intensité (fléchage sur le conducteur)

On oriente E_1 et E_2 dans le sens de I

Si on flèche les tensions aux bornes de chaque dipôle.

$$U_1 = E_1 - R_1 I \quad U_2 = E_2 - R_2 I \quad U_3 = -R_3 I$$



.4.6.4 Etude du fonctionnement du circuit

On considère $E_1 > 0$; compte tenu du fléchage et du fait que G_2 est en opposition $E_2 = -8 \text{ V}$

La loi des mailles permet d'écrire :

$$U_1 + U_2 + U_3 = 0$$

$$E_1 - R_1 I + E_2 - R_2 I - R_3 I = 0 \quad I = \frac{E_1 + E_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{E_1 - 8}{2 + 3 + 10} = \frac{E_1 - 8}{15}$$

$$U_1 = E_1 - R_1 I \quad P_1 = - U_1 I$$

$$U_2 = E_2 - R_2 I \quad P_2 = - U_2 I$$

$$U_3 = -R_3 I \quad P_3 = - U_3 I$$

.4.6.5 Résultats

On fait varier E_1 de 12 V à 4 V

Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant.

E1	I	E1 I	E2 I	U1	U2	U3	P1	P2	P3	P1+P2+P3	U1+U2+U3
12,00	0,27	3,20	-2,13	11,47	-8,80	-2,67	-3,06	2,35	0,71	0,00	0,00
11,00	0,20	2,20	-1,60	10,60	-8,60	-2,00	-2,12	1,72	0,40	0,00	0,00
10,00	0,13	1,33	-1,07	9,73	-8,40	-1,33	-1,30	1,12	0,18	0,00	0,00
9,00	0,07	0,60	-0,53	8,87	-8,20	-0,67	-0,59	0,55	0,04	0,00	0,00
8,00	0,00	0,00	0,00	8,00	-8,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
7,00	-0,07	-0,47	0,53	7,13	-7,80	0,67	0,48	-0,52	0,04	0,00	0,00
6,00	-0,13	-0,80	1,07	6,27	-7,60	1,33	0,84	-1,01	0,18	0,00	0,00
5,00	-0,20	-1,00	1,60	5,40	-7,40	2,00	1,08	-1,48	0,40	0,00	0,00
4,00	-0,27	-1,07	2,13	4,53	-7,20	2,67	1,21	-1,92	0,71	0,00	0,00

.4.6.6 Interprétation

➤ $E_1 > 8 \text{ V}$

G_1 est générateur $I > 0$ $E_1 > 0$ $E_1 I > 0$ $P_1 < 0$

G_2 est récepteur $I > 0$ $E_2 < 0$ $E_2 I < 0$ $P_2 > 0$

➤ $E_1 = 8 \text{ V}$

$E_1 = -E_2$ $I = 0$

➤ $E_1 < 8 \text{ V}$

G_1 est récepteur $I < 0$ $E_1 > 0$ $E_1 I < 0$ $P_1 > 0$

G_2 est générateur $I < 0$ $E_2 < 0$ $E_2 I > 0$ $P_2 < 0$

.4.6.7 Conclusion

Un générateur peut effectivement se comporter comme récepteur.

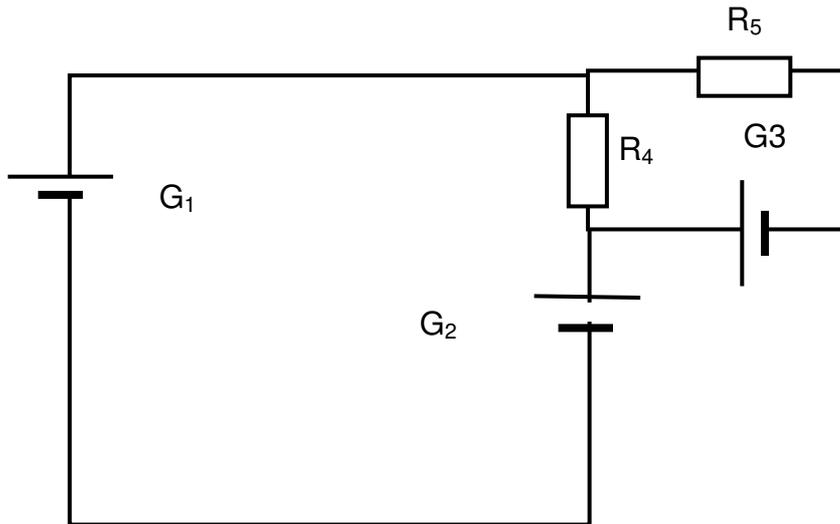
Dans tous les cas on vérifie pour le circuit $\Sigma P = 0$ et compte tenu du fléchage

$U_1 + U_2 + U_3 = 0$

.4.7 COMMENT APPLIQUER CORRECTEMENT LA LOI D'OHM GENERALISEE ?

La méthode conseillée est exposée dans l'exercice suivant :

.4.7.1.1 *Énoncé*



Les dipôles G_1 , G_2 et G_3 sont des générateurs dont les polarités sont indiquées.

Les valeurs des résistances internes de ces générateurs sont :

$$R_1 = 10 \Omega \quad R_2 = 15 \Omega \quad R_3 = 10 \Omega$$

Les valeurs absolues des fem de ces générateurs sont :

$$E_1 = 100 \text{ V} \quad E_2 = 150 \text{ V} \quad E_3 = 200 \text{ V}$$

Dans le circuit figurent deux autres résistances $R_4 = 5 \Omega$ et $R_5 = 20 \Omega$

.4.7.1.2 *Méthode conseillée.*

↪ Faire un schéma. Y faire figurer les polarités des 3 générateurs.

↪ Flécher sur chaque branche les sens positifs correspondant aux courants

↪ Flécher les E :

Flécher E_1 et E_2 dans le sens positif choisi pour I_1 et E_3 dans le sens positif choisi pour I_3

↪ Dans l'énoncé les valeurs de E_1 , E_2 et E_3 sont arithmétiques.

Passer aux valeurs algébriques, en regardant l'orientation de la flèche et le pôle + du générateur correspondant.

↪ Flécher les tensions aux bornes de toutes les résistances comme on le veut et indiquer les expressions de ces tensions.

↪ Ecrire la loi des nœuds

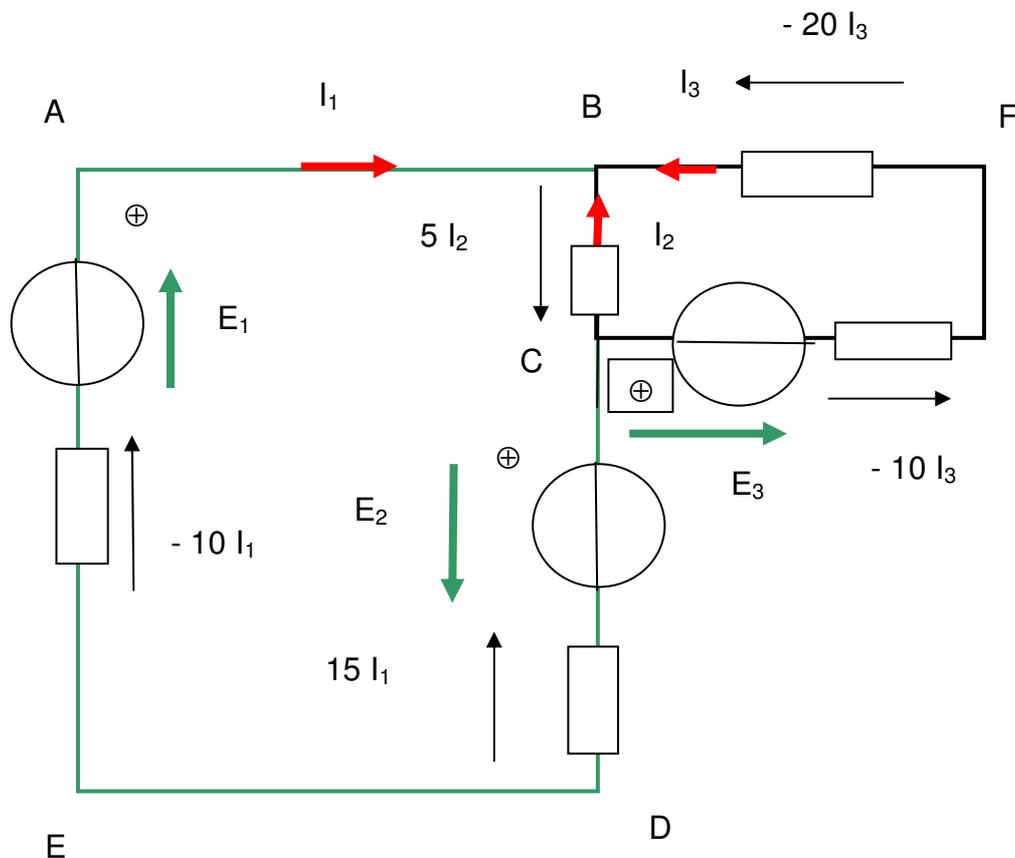
↪ Appliquer la loi des mailles.

Ici, il faut deux équations de mailles car nous avons déjà une équation résultant de l'application de la loi des nœuds et il y a 3 inconnues.

Résoudre le système d'équations.

Pour chaque générateur, faire le produit de E par le I correspondant. Conclure.

.4.7.1.3 Mise en équation



$$E_1 = +100 \text{ V} \quad E_2 = -150 \text{ V} \quad E_3 = -200 \text{ V}$$

Loi des nœuds $I_1 + I_2 + I_3 = 0$

Loi des mailles :

maille ABCDEA: $5 I_2 + E_2 - 15 I_1 - 10 I_1 + E_1 = 0$

maille BFCB: $20 I_3 + 10 I_3 - E_3 - 5 I_2 = 0$

.4.7.1.4 Résolution du système

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

$$-25 I_1 + 5 I_2 = -E_1 - E_2$$

$$-25 I_1 + 5 I_2 = -100 - (-150) = 50$$

$$-5 I_2 + 30 I_3 = E_3$$

$$-5 I_2 + 30 I_3 = -200$$

$$I_1 = -0,731 \text{ A}$$

$$I_2 = 6,34 \text{ A}$$

$$I_3 = -5,609 \text{ A}$$

.4.7.1.5 Conclusion

$$E_1 I_1 = (100)(-0,731) = -73,1 \text{ W} < 0 \text{ donc dipôle récepteur}$$

$$E_2 I_1 = (-150)(-0,731) = +109,6 \text{ W} > 0 \text{ donc dipôle générateur}$$

$E_3 I_3 = (-200)(-5,609) = + 1121 \text{ W} > 0$ donc dipôle générateur.

.4.7.1.6 Vérification.

On peut vérifier que $E_1 I_1 + E_2 I_1 + E_3 I_3 - 25 I_1^2 - 5 I_2^2 - 30 I_3^2 = 0$ donc que la somme des puissances échangées dans le circuit est nulle

.4.8 EXERCICES

□ Exercice 1

La tension aux bornes d'un générateur est égale à 5,4 V lorsque l'intensité du courant débité vaut 0,1 A ; elle est égale à 5 V pour 0,2 A

Déterminer la fem et la résistance interne du générateur.

Quelle est l'équation de la caractéristique $U=f(I)$?

Quelle est l'équation de $I=f(U)$?

Quelle serait la valeur de l'intensité de court-circuit du générateur ?

□ Exercice 2

Un générateur a pour force électromotrice E et pour résistance interne $r=0,5 \Omega$.

Il débite un courant d'intensité I

Les valeurs absolues de E et de I valent 12 V et 2 A.

Algébriser E, I et U dans tous les cas de figure possibles et donner les valeurs de EI et de P dans chaque cas.

□ Exercice 3

La puissance fournie par un générateur de résistance $R = 2 \Omega$ au circuit électrique est égale à 180 W. Le rendement énergétique du générateur est $\eta = 90 \%$. Déterminer les valeurs de la fem du générateur, de l'intensité du courant et de la tension aux bornes

□ Exercice 4

Un récepteur a pour force contre- électromotrice E' et pour résistance interne $r'=2 \Omega$.

Il est parcouru par un courant d'intensité I

Les valeurs absolues de E' et de I valent 6 V et 2 A.

Algébriser E', I et U dans tous les cas de figure possibles et donner les valeurs de E'I et de P dans chaque cas.

□ Exercice 5

Un moteur fonctionne sous 200 V. La résistance interne vaut $0,4 \Omega$ et les pertes par effet Joule valent 200 W ; les autres pertes sont négligées.

Lorsqu'il fonctionne à pleine charge, l'intensité du courant $I=40 \text{ A}$ et la fréquence de rotation est de 1000 tours par minute.

Calculer :

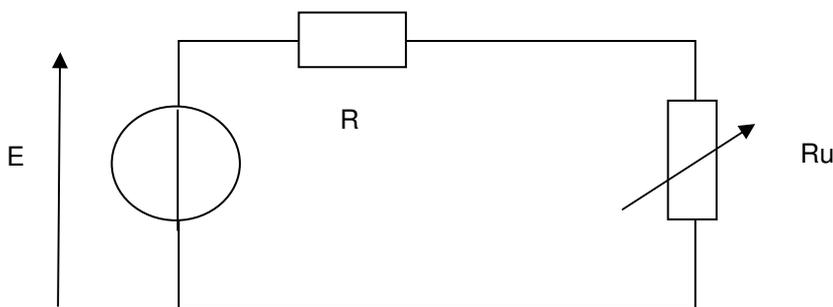
- la fcm

la puissance absorbée, la puissance utile et le rendement

- le couple électromagnétique

* Exercice 6.

Les caractéristiques d'un générateur sont : $E= 12 \text{ V}$ et $R=500 \Omega$



Calculer la puissance P_u fournie à la charge résistive R_u en fonction de E , R et R_u .

Tracer $P_u = f(R_u)$ pour $0 \leq R_u \leq 2 \text{ k}\Omega$

Exprimer η , rendement du générateur, en fonction de R_u et tracer la fonction $\eta = f(R_u)$.

* Exercice 7.

Un générateur (E_1, R_1) alimente un moteur (E_2, R_2)

Sachant que $E_1 = 12 \text{ V}$, $R_1 = 0,75 \Omega$, $R_2 = 0,25 \Omega$ et que la puissance mécanique du moteur est égale à 20 W, calculer

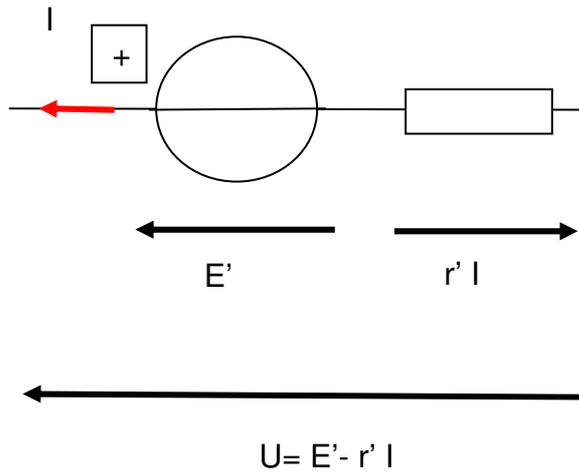
1. la valeur de I (on prendra la plus petite possible)

2. la valeur de l'énergie électrique consommée par le moteur en dix minutes de fonctionnement

.4.9 CORRIGES DES EXERCICES

□ Exercice 1

Convention : $E > 0$



$U = E - RI$ $5,4 = E - 0,1 R$ $5 = E - 0,2 R$ la résolution conduit à $E = 5,8 \text{ V}$ et $R = 4 \Omega$

Equation : $U = 5,8 - 4 I$

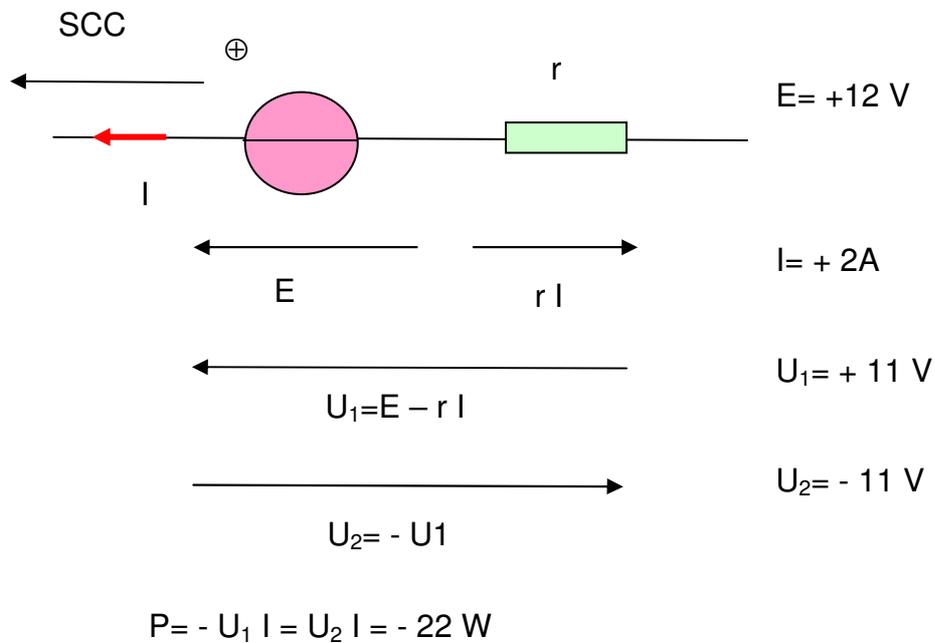
Equation $I = 1,45 - 0,25U$

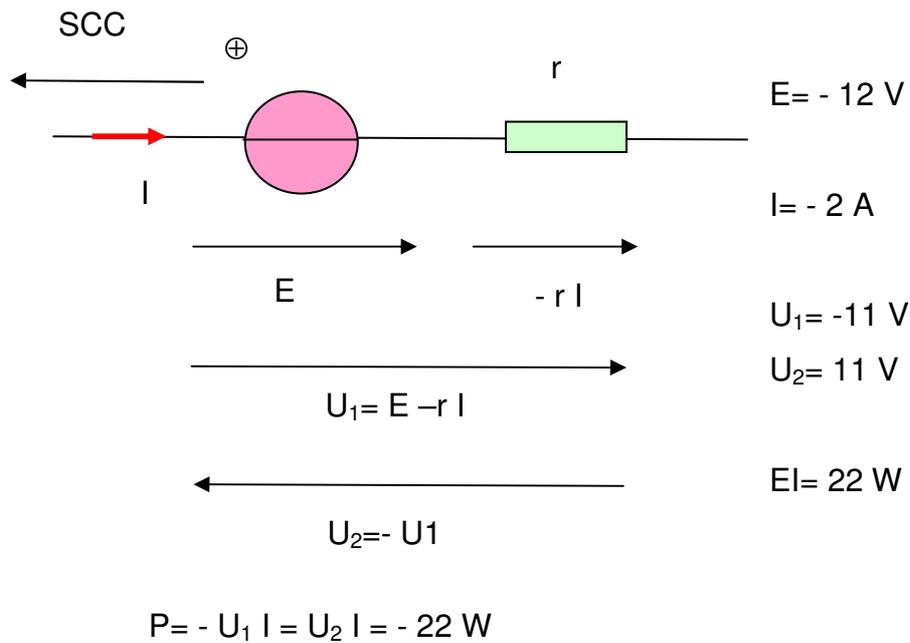
Si le générateur était mis en court-circuit (liaison des deux pôles par un fil de résistance nulle), il déborderait un courant d'intensité I_{cc} et la tension aux bornes du fil, qui est aussi la tension aux bornes du générateur, serait nulle

$I_{cc} = 1,45 \text{ A}$

□ Exercice 2

Corrigé de l'exercice





□ Exercice 3

même convention que dans l'exercice précédent

$$EI = UI + RI^2$$

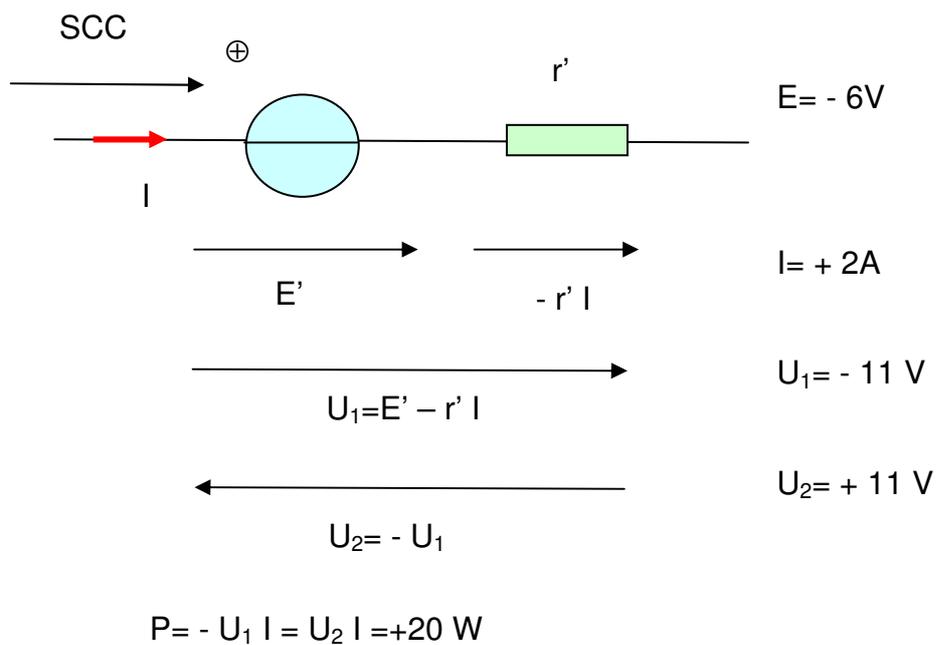
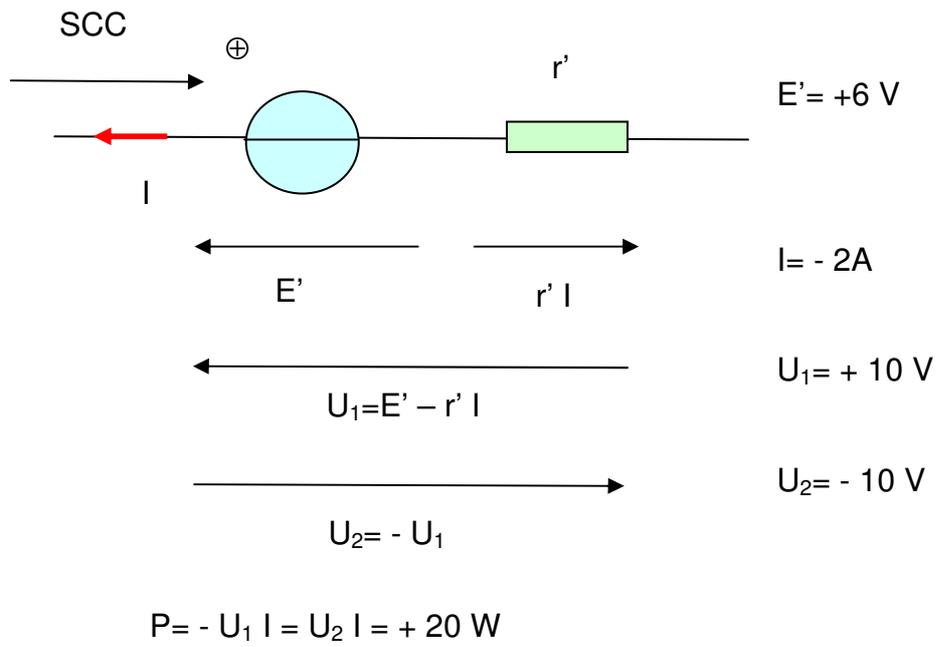
$$UI = 180 \text{ W} \quad \eta = \frac{UI}{EI} \Rightarrow EI = \frac{180}{0,9} = 200 \text{ W}$$

$$RI^2 = 200 - 180 = 20 \text{ W} \quad I = \sqrt{\frac{20}{2}} = 3,16 \text{ A} \quad I = \sqrt{\frac{20}{2}} = 3,16 \text{ A}$$

$$EI = 200 \quad E = 200 / 3,16 = 63,25 \text{ V}$$

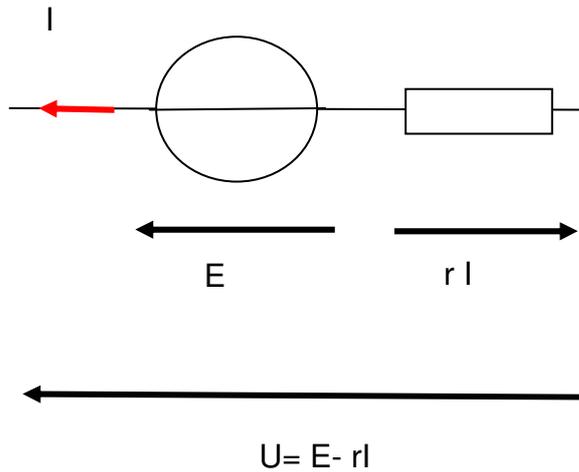
$$U = E - RI \quad U = 63,25 - 2 \cdot 3,16 = 56,9 \text{ V}$$

□ Exercice 4



Exercise 5

Convention : $E' > 0$ $I < 0$



$$U = E' - R'I \quad E' = U + R'I \quad E' = 200 + 0,4 \times (-40) = 184 \text{ V}$$

$$\text{Puissance absorbée} = -UI = -200 \times (-40) = 8000 \text{ W}$$

$$\text{Puissance utile} : E'I = 184 \times (-40) = -7360 \text{ W}$$

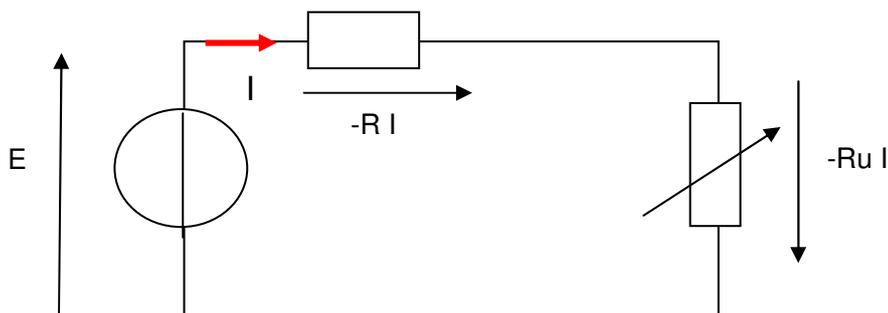
$$\text{Rendement } \eta = \frac{7360}{8000} = 0,92 \quad \eta = \frac{7360}{8000} = 0,92 \text{ soit } 92 \%$$

$$\text{Couple électromagnétique } T = \frac{P}{\omega} = \frac{E'I}{2\pi n} \quad n \text{ en tours/seconde}$$

$$T = \frac{7360}{2\pi \frac{1000}{60}} = 70,3 \text{ N.m}$$

* Exercice 6

Convention : $E > 0$ donc $I < 0$ car il s'agit d'un générateur



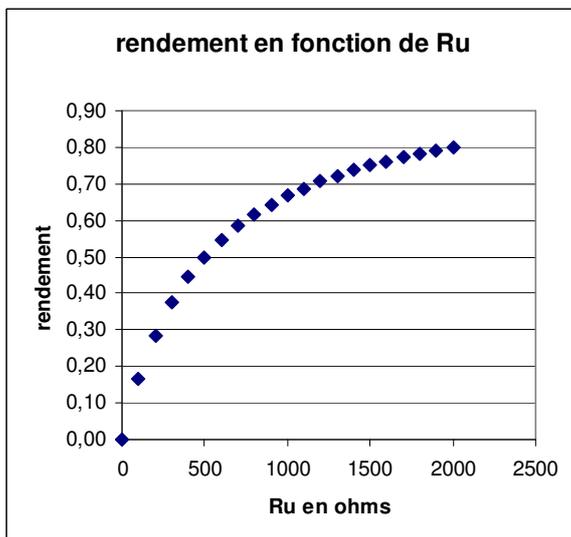
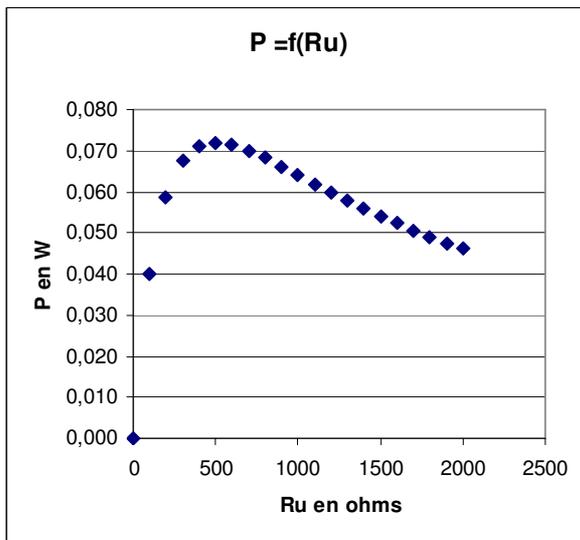
D'après la loi des mailles : $E - R I - R_u I = 0$

$$\text{D'où } I = \frac{E}{R + R_u}$$

La puissance consommée par la charge est $P = R_u I^2$

$$P = R_u \left(\frac{E}{R + R_u} \right)^2 \quad P = R_u \left(\frac{12}{500 + R_u} \right)^2$$

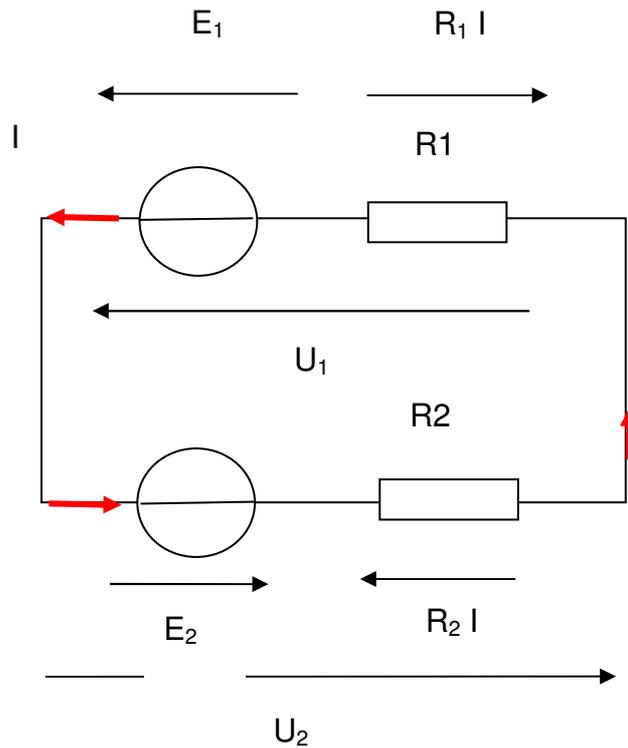
$$\eta = \frac{UI}{EI} = \frac{U}{E} = \frac{E - RI}{E} = 1 - \frac{R}{E} I = 1 - \frac{R}{R + Ru} \quad \eta = 1 - \frac{500}{500 + Ru}$$



Le graphique met en évidence la propriété remarquable :

$P = P_{max}$ pour $Ru = R$

*** Exercice 7**



1. Convention : $I > 0$ $E_1 > 0$ $E_2 < 0$

La loi des mailles permet d'écrire :

$$U_1 + U_2 = 0$$

$$E_1 - R_1 I + E_2 - R_2 I = 0$$

$$E_1 I - (R_1 + R_2) I^2 + E_2 I = 0 \quad 12 I - I^2 - 20 = 0$$

car $E_2 I = -20 \text{ W}$

$$I^2 - 12I + 20 = 0 \quad \text{solutions 2 et 10 A}$$

On retient $I = 2 \text{ A}$ $E_2 = \frac{-20}{I} = \frac{-20}{2} = -10 \text{ V}$

2.

$$P = - U_2 I \quad (U_2 \text{ et } I \text{ fléchées dans le même sens})$$

$$U_2 = E_2 - R_2 I \quad U_2 = -10 - 0,25(2) = -10,5 \text{ V}$$

$$W = - U_2 I \Delta t = - (-10,5)(2)(600) = +12\,600 \text{ J}$$

.CHAPITRE 5 THEOREMES EN ELECTROCINETIQUE

Remarque préliminaire :

Tous les théorèmes et toutes les lois dont il est question dans ce chapitre ne sont applicables que si les circuits auxquels on les applique ne comportent que des dipôles linéaires et des sources indépendantes les unes des autres. Un dipôle est linéaire si la fonction $u=f(i)$ qui le caractérise est une fonction linéaire ou affine c'est-à-dire si sa représentation est une droite

.5.1 LOI DE POUILLET.

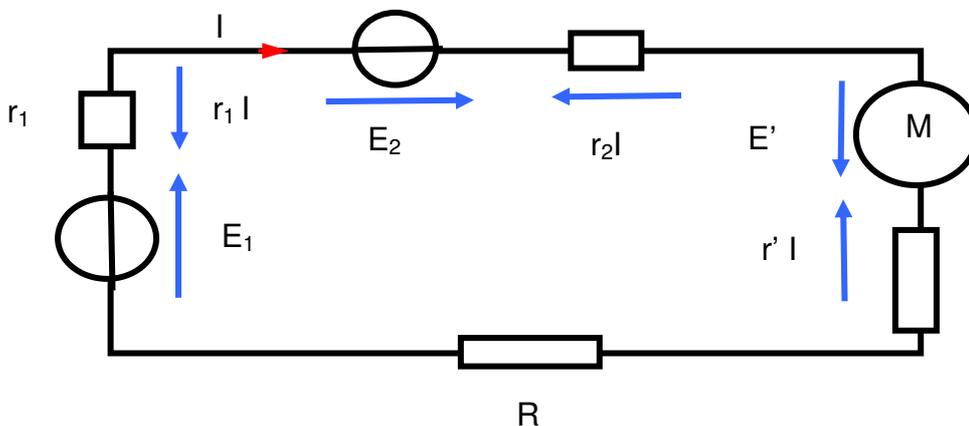
.5.1.1 Exemple

Soit un circuit ne comportant que des éléments en série : deux générateurs, un moteur et une résistance. Le générateur 1 impose le sens du courant.

Le générateur 2, monté en opposition, se comporte comme un récepteur.

Si $I > 0$ $E_1 > 0$ $E_2 < 0$ $E' < 0$

E_1 , E_2 et E' sont fléchées dans le sens de I



L'application de la loi des mailles permet d'écrire :

$$E_1 - r_1 I + E_2 - r_2 I + E' - r' I - R I = 0$$

$$I = \frac{E_1 + E_2 + E'}{r_1 + r_2 + R}$$

.5.1.2 Généralisation

On peut généraliser à un nombre quelconque d'éléments en série et écrire :

$$I = \frac{\sum E}{\sum r}$$

.5.1.3 Loi de Pouillet

Dans un circuit en série, l'intensité du courant est égale au quotient de la somme des forces électromotrices et des forces contre électromotrices par la somme totale des résistances du circuit.

.5.2 LOIS DE KIRCHOFF

.5.2.1 Enoncé.

Appliquer les lois de Kirchoff c'est appliquer les lois des nœuds et des mailles au circuit en s'arrangeant pour qu'il y ait autant d'équations que d'inconnues

.5.2.1.1 Loi des nœuds

La somme algébrique des intensités des courants arrivant et partant d'un nœud est nulle

.5.2.1.2 Loi des mailles

La somme algébrique des tensions le long d'une maille parcourue dans un sens donné (les tensions fléchées dans le sens de parcours de la maille n'étant pas affectées du même signe que celles fléchées en sens inverse) est nulle

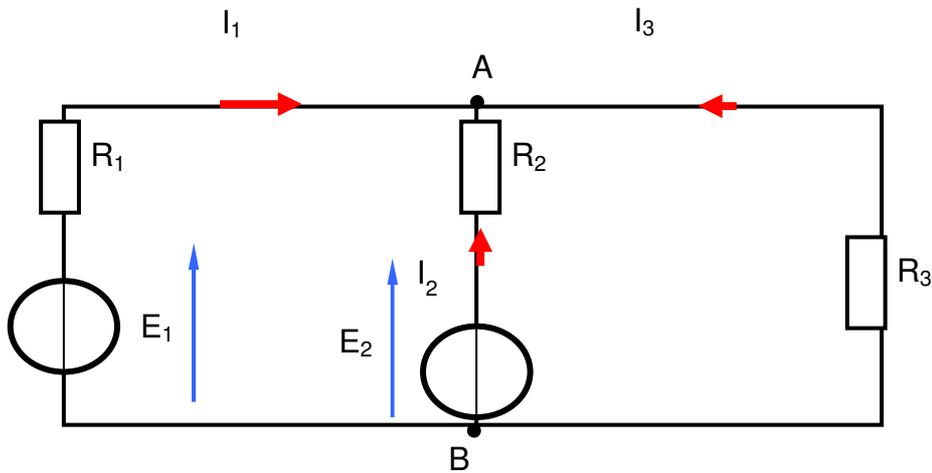
.5.2.2 Application:

.5.2.2.1 Enoncé

Données : $E_1 = 200 \text{ V}$ $E_2 = 100 \text{ V}$ $R_1 = 5 \Omega$ $R_2 = 10 \Omega$

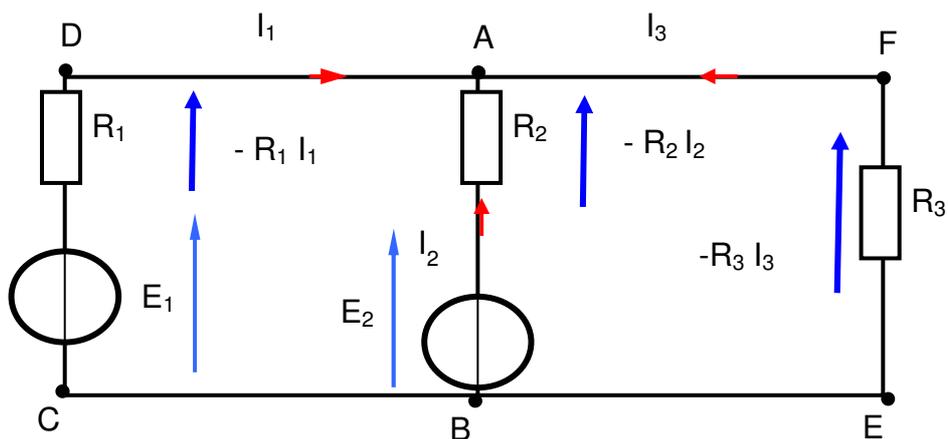
$R_3 = 20 \Omega$

Déterminer l'intensité du courant circulant dans R_3



Les sens positifs choisis pour les trois intensités sont fléchés.

.5.2.2 Résolution



Conventions : E et I fléchées dans le même sens pour les deux générateurs

Loi des nœuds $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ (1)

Loi des mailles

Maille ABCDA : $-R_2 I_2 - E_2 + E_1 - R_1 I_1 = 0$ $-10 I_2 - 100 + 200 - 5 I_1 = 0$ (2)

Maille ABEF : $-R_2 I_2 - E_2 + R_3 I_3 = 0$ $-10 I_2 - 100 + 20 I_3 = 0$ (3)

La résolution du système formé par les 3 équations (1-2-3) conduit à

$I_3 = - 50 / 7 = -7,14$ A le courant circule donc dans R_3 de F vers E (en sens contraire du sens positif choisi).

$I_1 = 11,4$ A $I_2 = - 4,28$ A

$E_1 I_1 > 0$ le dipôle 1 est générateur

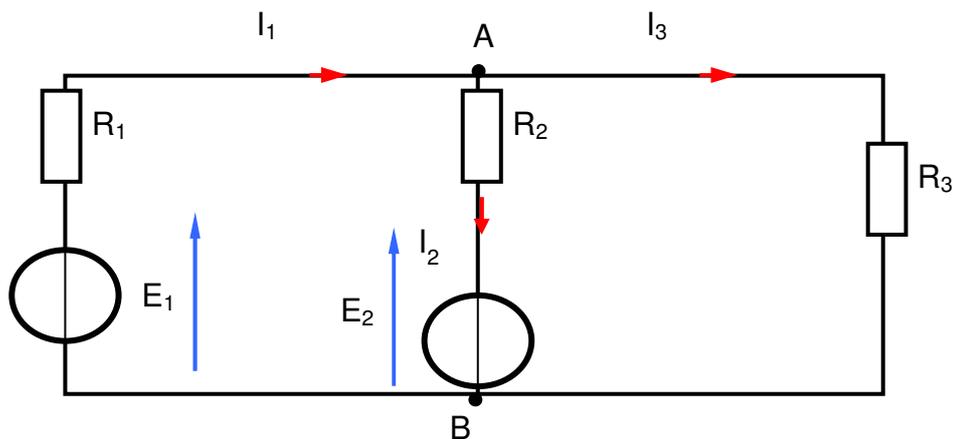
$E_2 I_2 < 0$ le dipôle 2 est récepteur .

.5.3 THEOREME DE SUPERPOSITION

.5.3.1 Enoncé

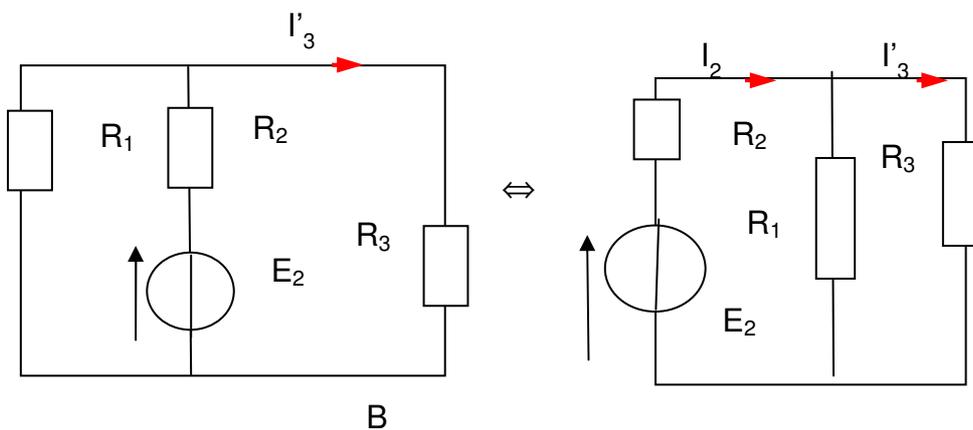
Dans un circuit, l'intensité du courant dans une branche est égale à la somme algébrique des intensités des courants produits dans cette branche par chaque générateur supposé seul, les autres étant réduits à leur résistance interne.

.5.3.2 Application



.5.3.3 Première étape :

On considère la branche contenant R_3 parcourue par un courant d'intensité I'_3 lorsque le générateur 2 est actif, les autres étant passivés



On cherche I'_3

R_1 et R_3 en parallèle sont remplacées par leur résistance équivalente laquelle est en série avec R_2 . Le générateur idéal de fem E_2 débite donc sur une résistance

$$(R_2 + R_{eq13})$$

D'après la loi de Pouillet, l'intensité du courant circulant dans R_2 est

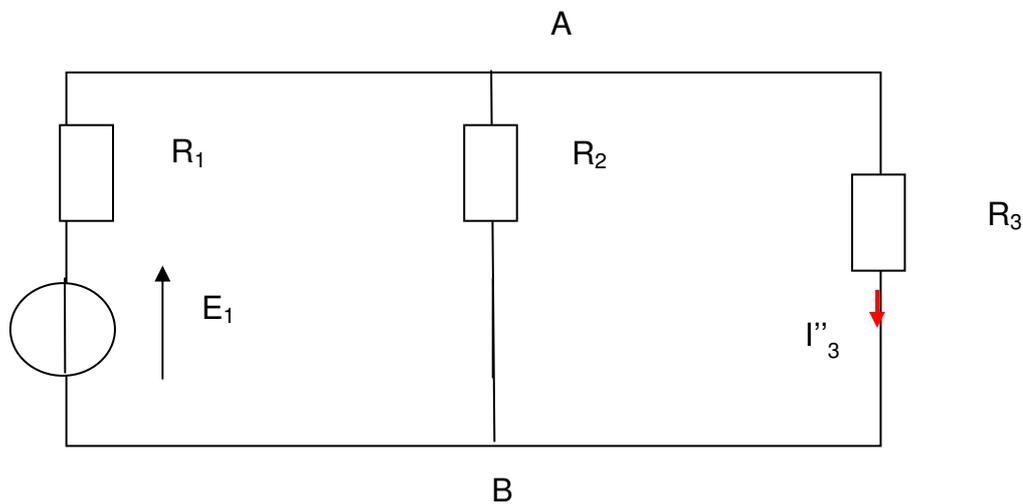
$$I_2 = \frac{E_2}{R_2 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}}$$

Par application du diviseur d'intensité, on en déduit

$$I'_3 = I_2 \frac{R_1}{R_1 + R_3} \quad I'_3 = 500 / 350 \text{ A} = 1,43 \text{ A}$$

.5.3.4 Deuxième étape :

On considère la branche contenant R_3 parcourue par un courant d'intensité I''_3 lorsque le générateur 1 est actif, les autres étant passivés



Soit I_1 circulant dans R_1 : $I_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}}$

Les calculs permettent d'obtenir $I''_3 =$

$$I_1 = \frac{E_1}{R_1 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3}} \quad I''_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3} \quad I''_3 = 2000 / 350 = 5,71 \text{ A}$$

.5.3.5 application du théorème de superposition

Les intensités I'_3 et I''_3 étant fléchées dans le même sens

$$I_3 = I'_3 + I''_3 \quad I_3 = \frac{500}{350} + \frac{2000}{350} = \frac{2500}{350} = 7,14 \text{ A}$$

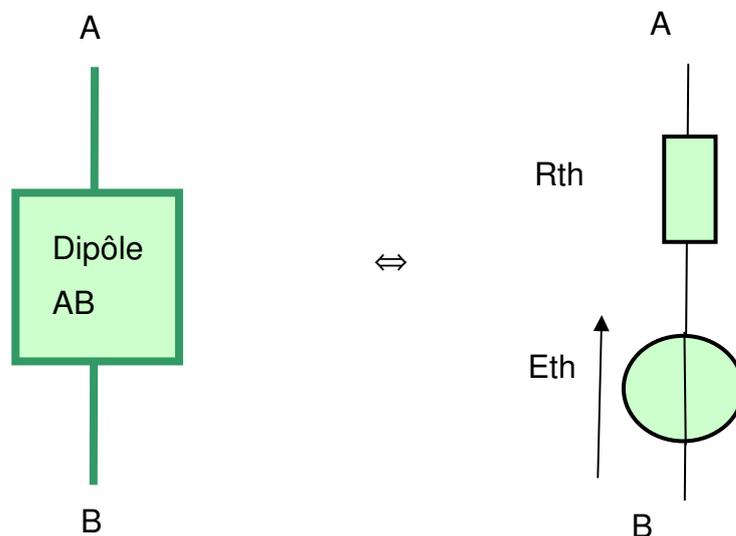
.5.4 THEOREME DE THEVENIN

.5.4.1 Enoncé du théorème

Un dipôle AB peut être remplacé par un dipôle équivalent de Thévenin de force électromotrice E_{th} et de résistance interne R_{th} .

E_{th} est égale à la tension U_{AB} à vide du dipôle c'est-à-dire lorsque le dipôle n'est pas connecté à des éléments externes

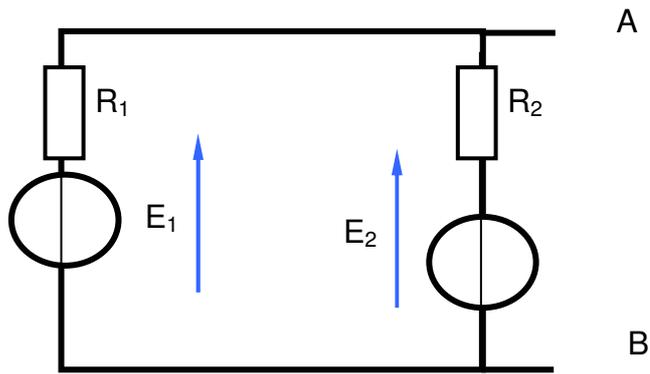
R_{th} est la résistance vue entre A et B lorsque toutes les sources sont passivées.



Le dipôle de Thévenin est plus simple que le dipôle AB et est équivalent au dipôle AB. Ceci signifie que si le dipôle de Thévenin est relié à un dipôle de charge, les tensions et intensités dans ce dipôle de charge auront les valeurs qu'elles avaient avant le remplacement du dipôle par un dipôle de Thévenin.

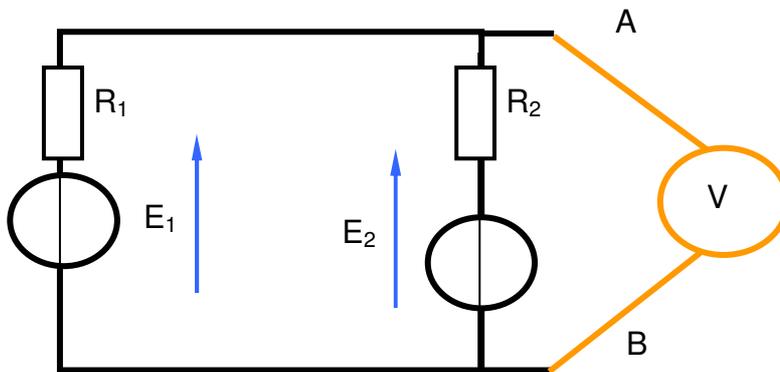
.5.4.2 Vérification expérimentale du théorème.

On considère le dipôle suivant :



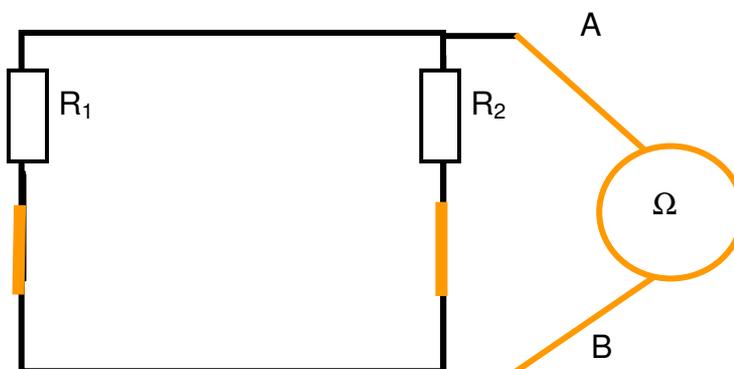
$$E_1 = 200 \text{ V} \quad E_2 = 100 \text{ V} \quad R_1 = 5 \, \Omega \quad R_2 = 10 \, \Omega$$

.5.4.2.1 On mesure la tension U_{ABO} existant entre A et B



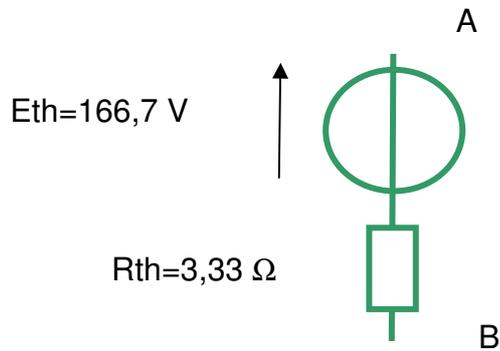
$$U_{ABO} = 166,7 \text{ V}$$

.5.4.2.2 On mesure à l'aide d'un ohmmètre la résistance entre A et B lorsque les générateurs sont passivés.

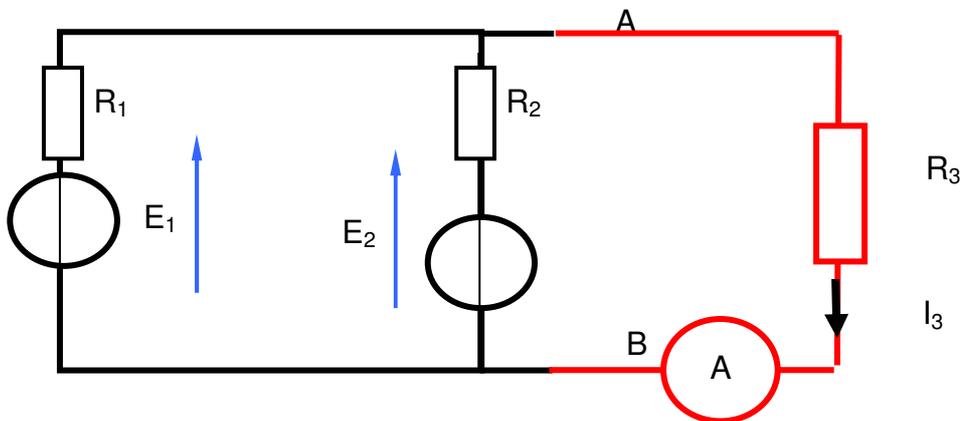


$$R_{AB} = 3,33 \, \Omega$$

.5.4.2.3 D'après le théorème de Thévenin, le dipôle AB peut être remplacé par un dipôle de Thévenin



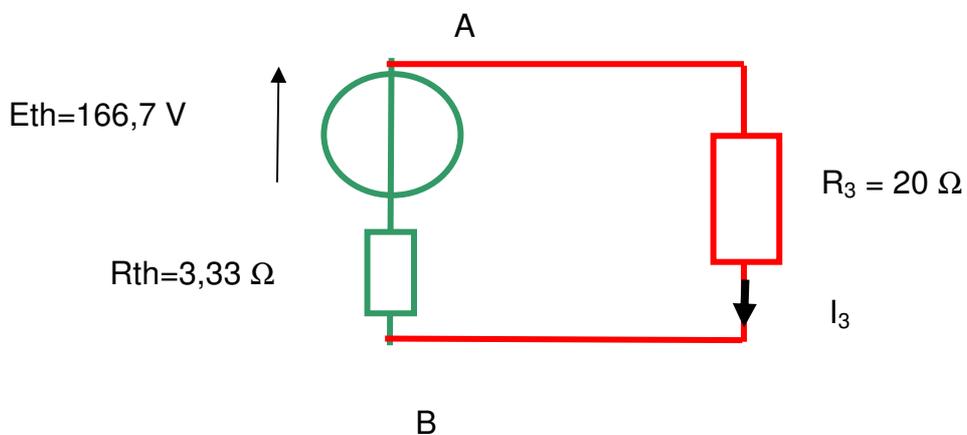
.5.4.2.4 On relie le dipôle à une résistance R_3 ($R_3 = 20 \Omega$)



L'intensité indiquée par l'ampèremètre est $I_3=7,14 \text{ A}$

Un voltmètre placé entre A et B indiquerait $U_{AB}= 142,8 \text{ V}$

.5.4.2.5 le théorème est vérifié



Si le dipôle de Thévenin alimentait la résistance R_3 , celle-ci serait parcourue par un courant d'intensité $I_3 = 7,14 \text{ A}$ et la tension U_{AB} serait égale à $142,8 \text{ V}$

Conclusion :

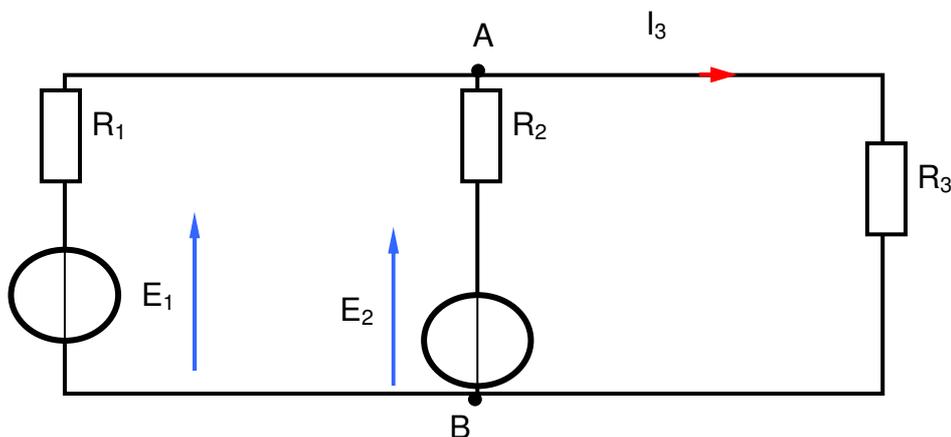
l'intensité dans R_3 et la tension aux bornes de R_3 ont même valeur si R_3 est reliée au dipôle AB ou au dipôle de Thévenin qui le remplace

Remarque :

Ne pas confondre U_{AB0} , tension à vide du dipôle et U_{AB} , tension en charge du dipôle AB (lorsque la charge R_3 est connectée)

.5.4.3 Application

On résoud l'exercice précédemment traité. en appliquant le théorème de Thévenin

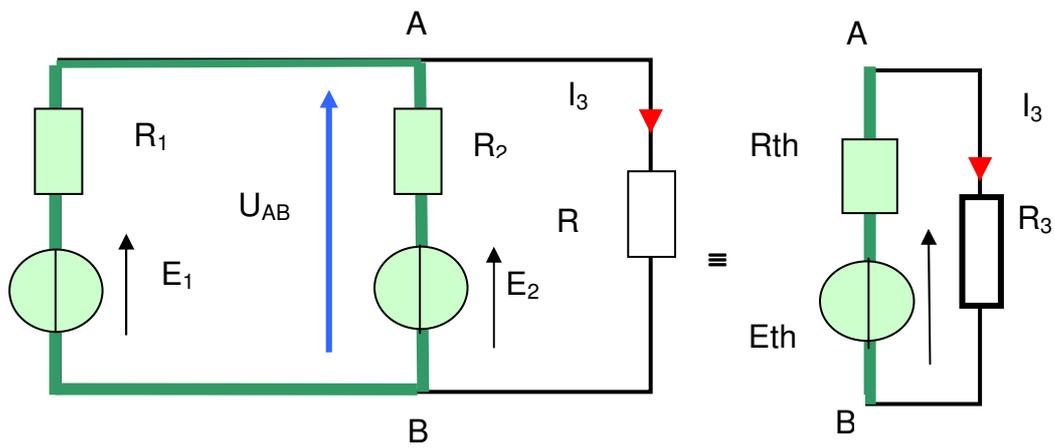


On recherche l'intensité du courant dans R_3

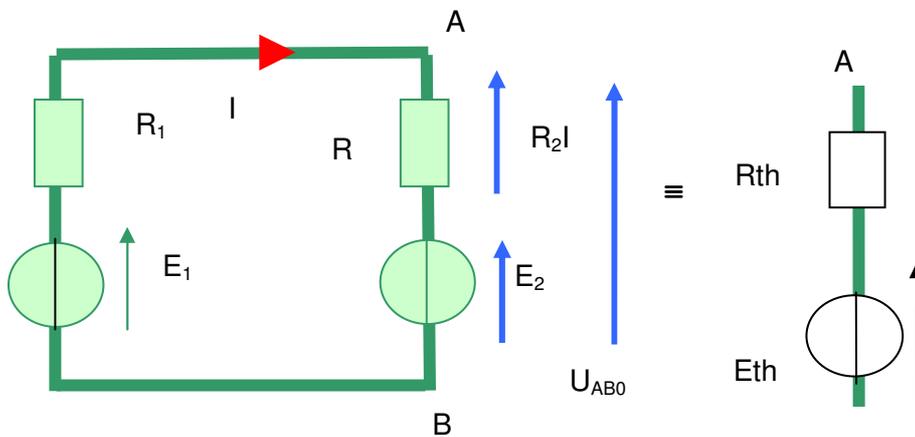
.5.4.3.1 Première étape - Choix du dipôle remplacé par un dipôle de Thévenin

On considère que le circuit est constitué de deux dipôles AB :

- celui de gauche, représenté en trait épais, sera remplacé par un dipôle de Thévenin
- celui de droite, la charge, sera alimenté par le générateur de Thévenin



.5.4.3.2 Deuxième étape : on détermine Eth



On cherche la tension U_{AB0} existant entre A et B lorsque le dipôle n'est pas relié à R_3 .

R_1 et R_2 sont maintenant parcourus par un courant de même intensité I .

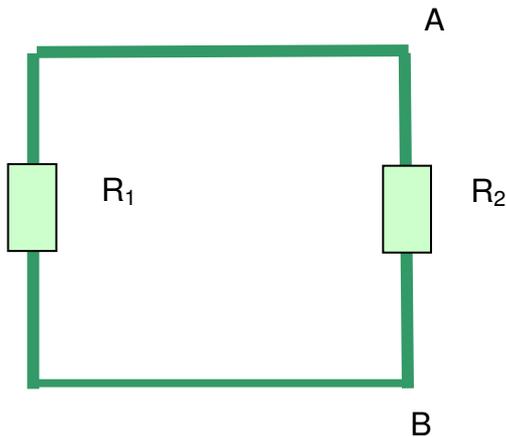
L'application de la loi de Pouillet permet d'écrire $I = \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}$

$$U_{AB0} = E_2 + R_2 I \quad \text{or} \quad E_{th} = U_{AB0}$$

$$E_{th} = E_2 + R_2 \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} \quad E_{th} = 100 + (10(200 - 100)) / (5 + 10) = 166,7 \text{ V}$$

.5.4.3.3 Troisième étape.

On reprend le dipôle et on le passive (on va réduire les générateurs de tension à leur résistance)



Si on place entre A et B un ohmmètre, il mesurera la résistance équivalente à R_1 et R_2 en parallèle.

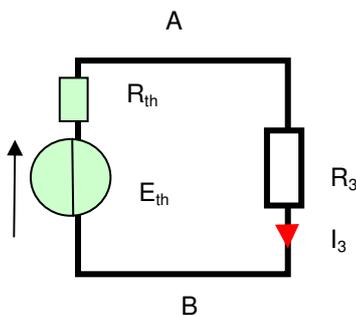
C'est la résistance « vue de

$$AB \gg R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_{th} = 5 \times 10 / 15 = 3,33 \Omega$$

.5.4.3.4 Dernière étape :

On reprend le schéma équivalent au circuit. Le dipôle de Thévenin alimente la résistance R_3



$$I_3 = \frac{E_{th}}{R_{th} + R_3} = \frac{E_2 + R_2 \frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2}}{R_{th} + R_3}$$

$$I_3 = \frac{E_{th}}{R_{th} + R_3} = \frac{E_2(R_1 + R_2) + R_2(E_1 - E_2)}{(R_1 + R_2)(R_{th} + R_3)}$$

$$I_3 = E_{th} / (R_{th} + R_3)$$

$$I_3 = 166,7 / (3,33 + 20) = 7,14 \text{ A}$$

.5.5 THEOREME DE NORTON

.5.5.1 Générateur de tension et générateur de courant.

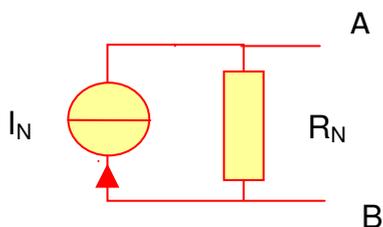
Le dipôle de Thévenin est un générateur de tension ; il applique une tension au dipôle placé entre ses bornes. Le générateur de tension idéal appliquerait une tension constante quel que soit le dipôle branché entre ses bornes.

Le dipôle de Norton est un générateur de courant. Il fait circuler un courant d'intensité déterminée dans le dipôle placé entre ses bornes. Le générateur de courant idéal ferait circuler un courant d'intensité constante quel que soit le dipôle branché entre ses bornes.

Les premiers générateurs étaient des générateurs de tension ; les générateurs de courant sont beaucoup plus récents. Néanmoins les deux ont une réalité physique et il existe des alimentations que l'on peut piloter soit en tension, soit en intensité.

.5.5.2 Définition du dipôle de Norton.

Le dipôle de Norton est un générateur débitant un courant d'intensité I_N et présentant une résistance R_N ; il est représenté ainsi :

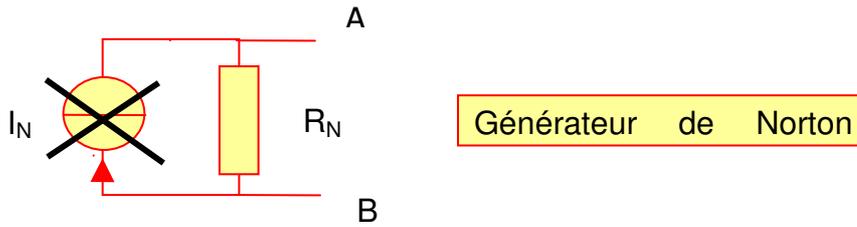


Dipôle de Norton

La tension existant à vide $U_{AB(0)}$ existant entre ses bornes A et B est égale à $R_N I_N$

$$U_{AB(0)} = R_N I_N$$

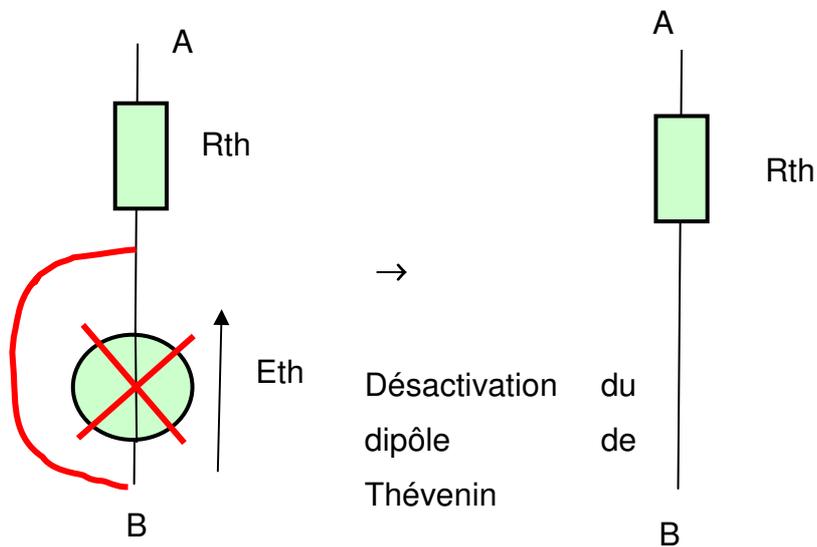
La résistance « vue de AB » est celle qui est mesurée entre A et B lorsque le générateur d'intensité est désactivé, c'est-à-dire lorsque l'on supprime la source d'intensité. Elle est égale à R_N .



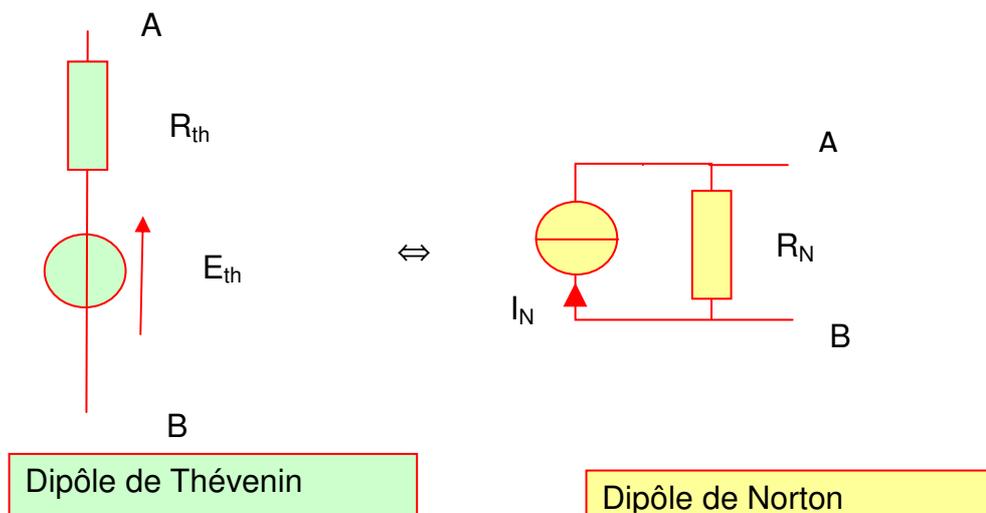
Remarque :

Il faut bien voir la différence entre la désactivation d'un dipôle de Thévenin et la désactivation d'un dipôle de Norton.

Désactiver un dipôle de Thévenin, c'est supprimer la source de tension E_{th} et la remplacer par un fil de résistance nulle.



.5.5.3 Equivalence entre un dipôle de Thévenin et un dipôle de Norton

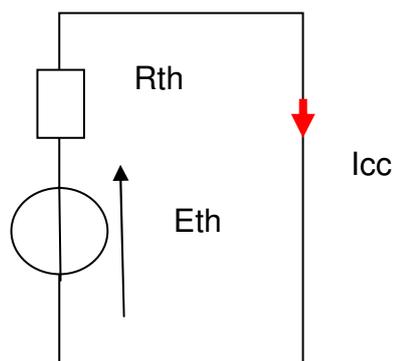


L'équivalence impose que la tension à vide existant entre A et B ait même valeur dans les deux cas, c'est-à-dire : $E_{th} = R_N I_N$

Il faut aussi que la résistance « vue de AB » ait même valeur, ce qui implique $R_{th} = R_N$

Il faut donc que $E_{th} = R_{th} I_N$ et donc que $I_N = \frac{E_{th}}{R_{th}}$

On constate que I_N doit être égale à l'intensité de court-circuit du dipôle de Thévenin.



$$I_{cc} = \frac{E_{th}}{R_{th}}$$

$$I_N = I_{cc} = \frac{E_{th}}{R_{th}}$$

En résumé :

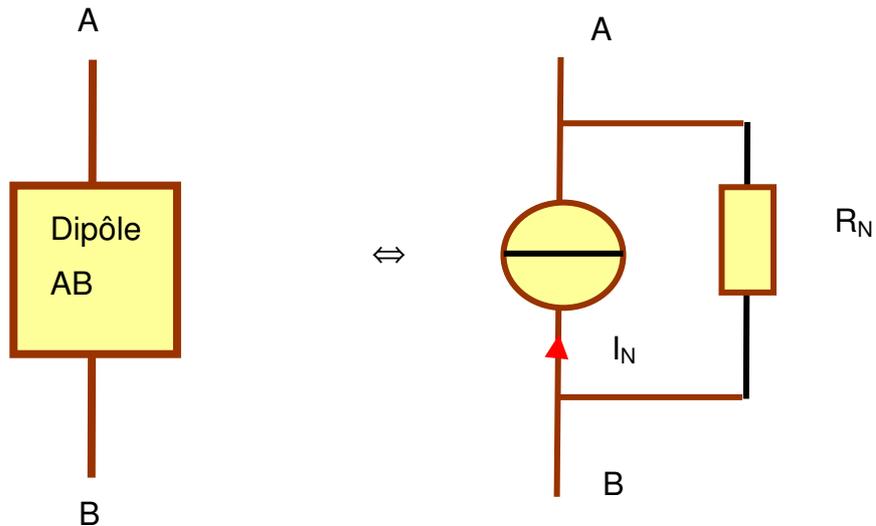
Si les dipôles de Thévenin et de Norton sont équivalents :

$$R_N = R_{th} \quad I_N = \frac{E_{th}}{R_{th}}$$

Un dipôle AB peut être remplacé par un dipôle équivalent de Norton, de courant I_N et de résistance interne R_N .

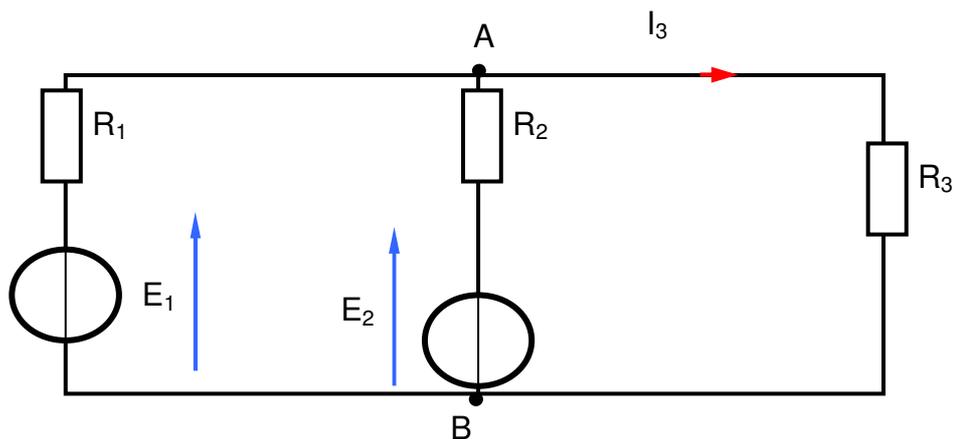
I_N est égale à l'intensité de court-circuit du dipôle AB

R_N est la résistance vue entre A et B lorsque toutes les sources sont passivées



.5.5.5 Application

On traite le même exercice que précédemment.

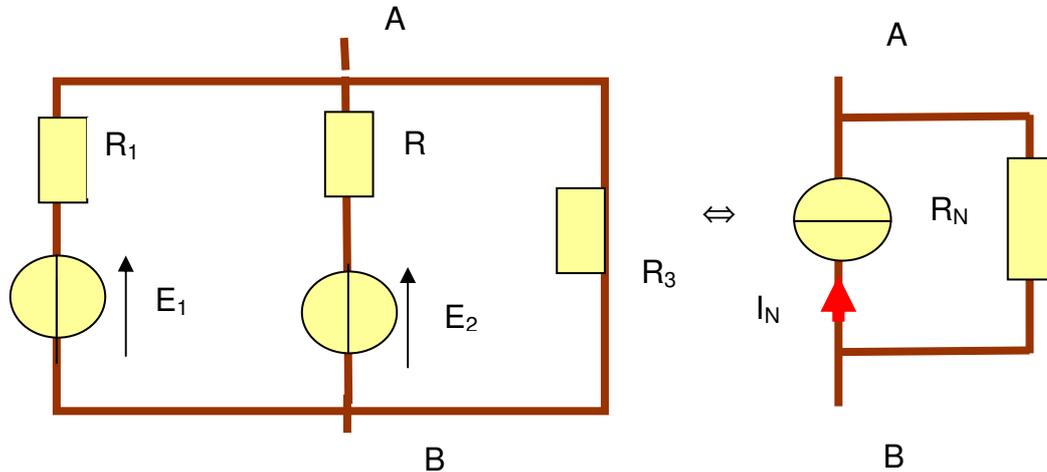


.5.5.6 Première étape :

On définit le dipôle que l'on va remplacer par un dipôle de Norton.

Nous allons refaire le même exercice que précédemment mais nous n'allons pas remplacer le même dipôle par un dipôle de Norton.

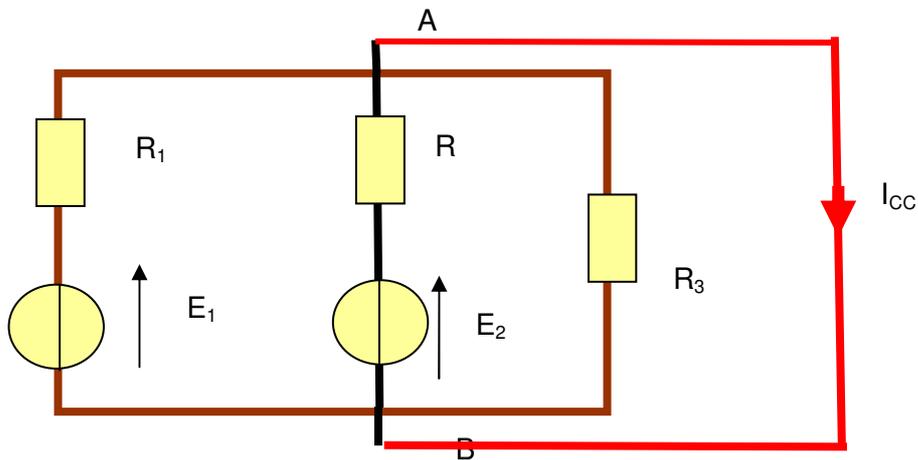
Ce dipôle est représenté en trait épais et en y ajoutant deux petites barres, qui ne changent rien au problème, on voit mieux le dipôle AB que l'on va remplacer par un générateur de Norton.



.5.5.7 Deuxième étape:

On détermine I_N du dipôle de Norton

Pour cela on établit un court-circuit entre A et B et on calcule l'intensité de court-circuit I_{cc} du courant.



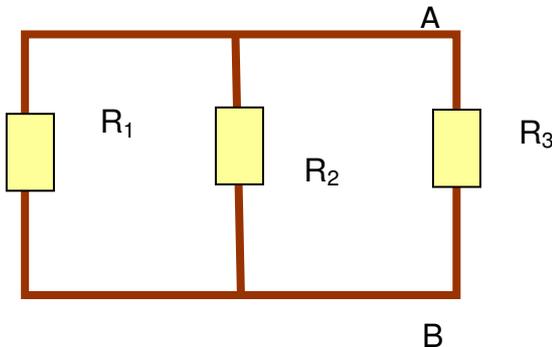
La résistance R_3 , court-circuitée, n'est parcourue par aucun courant. Pour le calcul de I_{cc} , on peut la retirer. L'application du théorème de superposition, bien adapté ici, ou des lois de Kirchoff, permet de déterminer I_{cc} .

$$I_{cc} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \quad \text{donc} \quad I_N = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \quad I_N = 40 + 10 = 50 \text{ A}$$

.5.5.8 Troisième étape :

Détermination de R_N

Les générateurs sont passivés : ce sont des générateurs de tension, ils sont réduits à leur résistance interne



$$\frac{1}{R_N} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$R_N = 20/7 \Omega \quad R_N = 2,86 \Omega$$

On remarque que cette résistance n'a pas la même valeur que R_{th} ; ceci est

.5.5.9 Dernière étape :

Retour au schéma équivalent

La tension aux bornes du générateur de Norton est $U_{AB} = R_N I_N$

$$U_{AB} = 50 \times 20 / 7 = 1000 / 7 = 142,86 \text{ V}$$

Or cette tension est celle qui existe entre A et B c'est à dire aux bornes de R_3

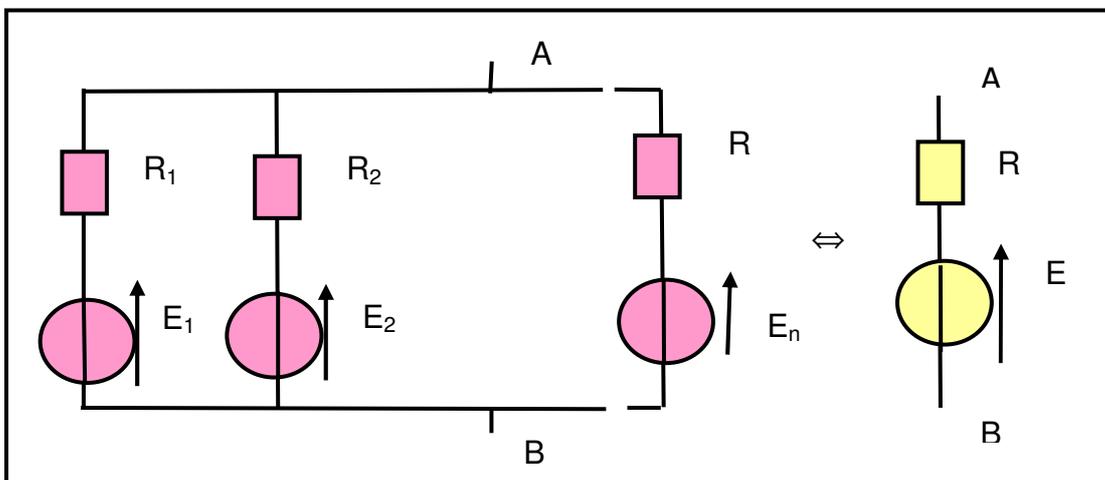
$$U_{AB} = R_3 I_3 \quad I_3 = U_{AB} / R_3 \quad I_3 = 1000 / (7 \times 20) = 50 / 7 = 7,14 \text{ A}$$

.5.6 THEOREME DE MILLMAN

.5.6.1 Démonstration

Cette démonstration est proposée en exercice : [exercice 6](#)

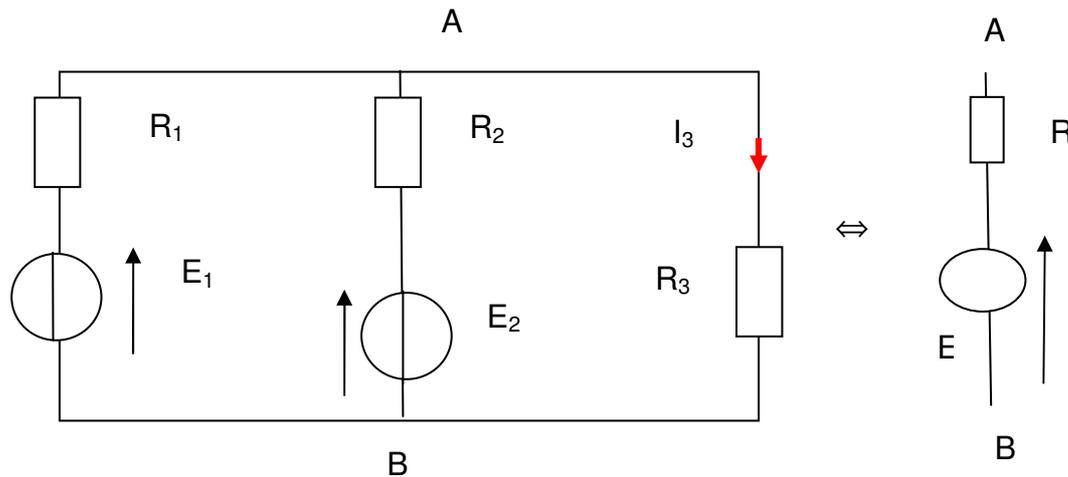
.5.6.2 Enoncé du théorème



Le dipôle AB constitué de n générateurs en parallèle est équivalent à un générateur de force électromotrice E et de résistance interne R

$$E = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{E_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}} \quad R = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}}$$

.5.6.3 Application



On applique le théorème en prenant $E_3 = 0$

$$E = \frac{\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{0}{R_3}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$E = 1000/7 \text{ V}$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad R = 2,86 \Omega$$

$$U_{AB} = E = R_3 \cdot I_3 \quad \text{d'où } I_3 \quad I_3 = 7,14 \text{ A}$$

.5.7 RESOLUTION D'UN PROBLEME D'ELECTRODINAMIQUE

Nous avons vu les principaux théorèmes applicables en électrocinétique. Quel théorème utiliser dans la pratique ?

La réponse à cette question n'est pas facile. En fait dans les exercices, c'est souvent en utilisant à la fois plusieurs théorèmes que l'on arrive le plus rapidement au résultat.

S'il s'agit de déterminer toutes les tensions et intensités dans un circuit, il faut utiliser les lois de Kirchoff, établir un système d'équations et le résoudre.

S'il s'agit de déterminer une intensité ou une tension il est conseillé d'utiliser les théorèmes.

On utilise assez souvent conjointement les théorèmes de Norton et de de superposition surtout lorsque le circuit comporte plusieurs éléments en parallèle. On peut aussi utiliser dans ce cas le théorème de Millmann.

La seule utilisation du théorème de superposition est assez lourde.

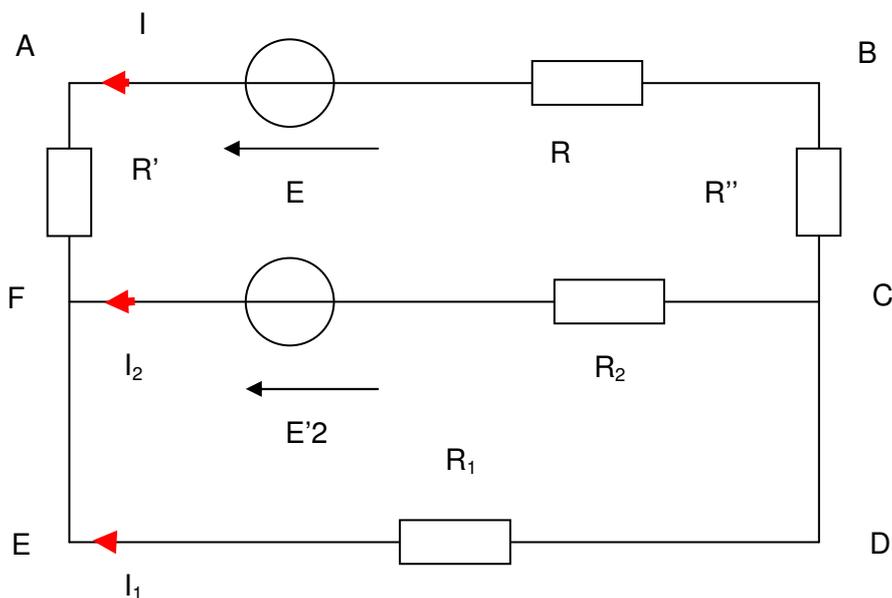
Dans tous les autres cas, l'association du théorème de Thévenin et/ou du théorème le théorème de superposition et de de la loi de Pouillet conduit à des solutions rapides.

Il faut aussi penser à la transformation de dipôles de Thévenin en dipôles de Norton et vice versa.

.5.8 EXERCICES

.5.8.1 * Exercice 1

Etablir un système d'équations permettant de déterminer les expressions de I_1 , I_2 , et I en fonction des données par application des lois de Kirchoff



.5.8.2 * Exercice 2 Application des lois de Kirchoff

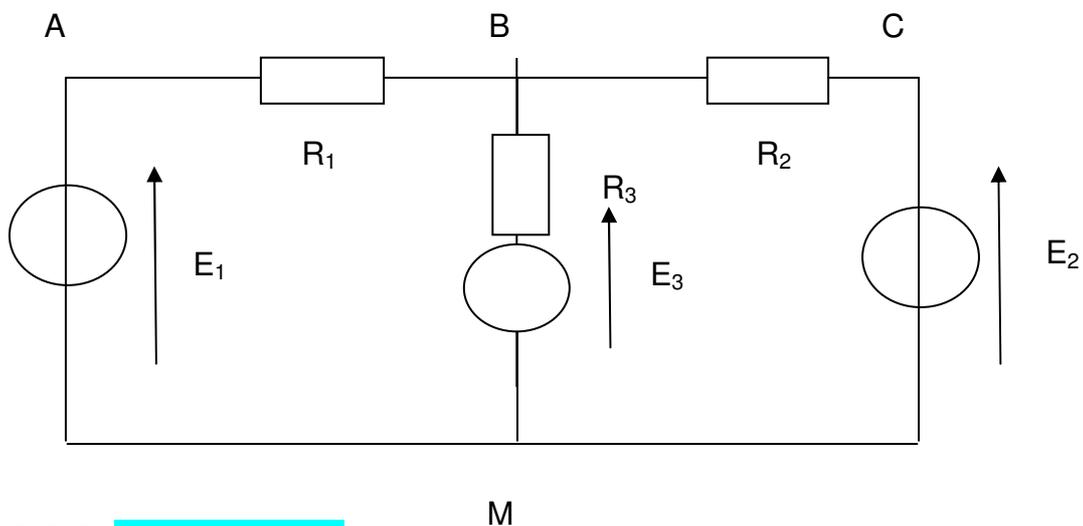
Une dynamo de fem $E = 40 \text{ V}$, de résistance $r = 1 \ \Omega$, est utilisée pour charger une batterie d'accumulateurs de fem $E' = 30 \text{ V}$ de résistance interne $r' = 1 \ \Omega$.

Calculer l'intensité du courant dans le circuit.

Entre A et B, bornes communes à la dynamo et à la batterie d'accumulateurs, on branche une résistance R en série avec un moteur de résistance $r''=0,25 \Omega$. Déterminer R sachant que l'intensité du courant dans la batterie d'accumulateurs est nulle et que la puissance fournie par le moteur est de 200 W.

.5.8.3 * Exercice 3

Le circuit comprend deux générateurs ($E_1 = 20 \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$, $E_2 = 15 \text{ V}$, $R_2 = 4 \Omega$) alimentant un moteur ($E_3 = 8 \text{ V}$, $R_3 = 5 \Omega$). Déterminer la valeur de l'intensité du courant dans R_3 par application du théorème de Thévenin



.5.8.4 * Exercice 4

Refaire l'exercice précédent par application du théorème de Norton

.5.8.5 * Exercice 5

Refaire l'exercice précédent par application du théorème de superposition

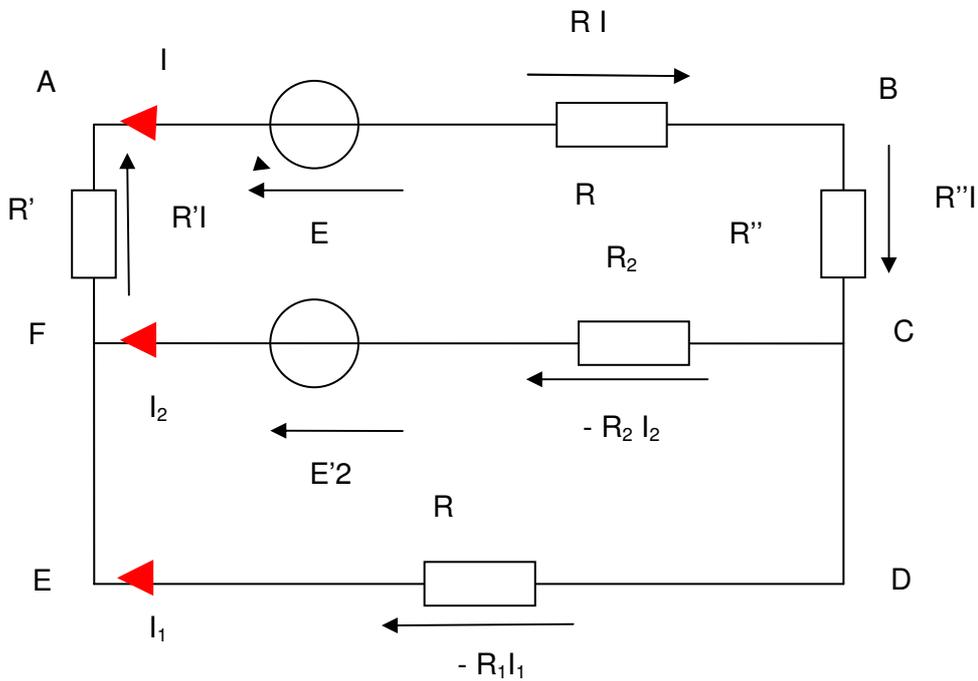
.5.8.6 □ Exercice 6

Reprendre les données de l'exercice précédent.

En utilisant l'équivalence entre générateur de tension et générateur de courant ainsi que le théorème de superposition, démontrer, dans le cadre de l'exercice, le théorème de Millman.

.5.9 CORRIGES DES EXERCICES

* Exercice 1



Convention : E fléchée dans le même sens que I et E'_2 fléchée dans le même sens que I_2

Loi des nœuds $I + I_1 + I_2 = 0$:

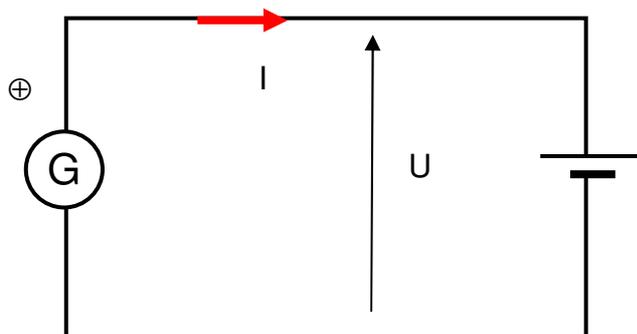
Loi des mailles

Maille ABDEA : $-E + RI + R''I - R_1I_1 + R'I = 0$

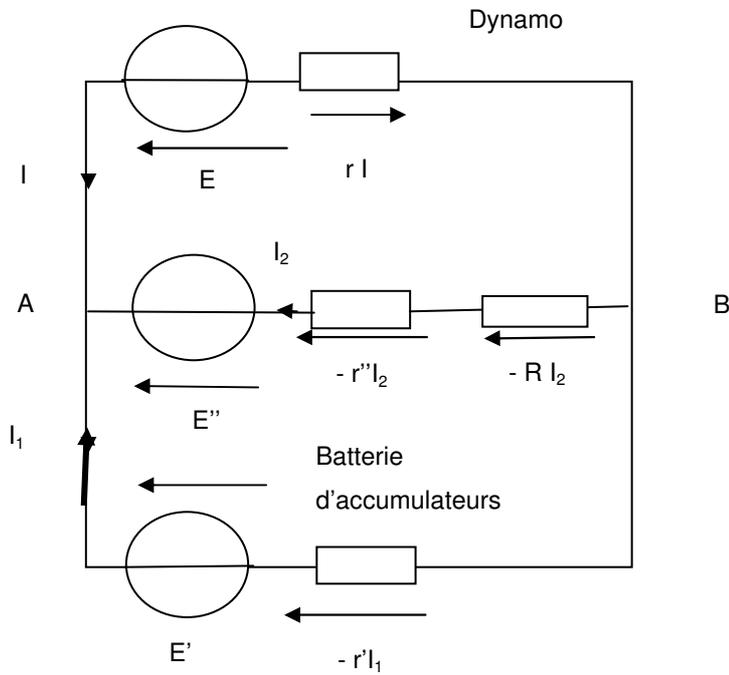
Maille FCDEF : $-E'_2 + R_2I_2 - R_1I_1 = 0$

Ces trois équations constituent un système possible : on aurait pu introduire l'équation relative à la maille ABCFA parmi les trois équations nécessaires.

* Exercice 2



D'après la loi de Pouillet : $I = \frac{E + E'}{r + r'}$ $I = \frac{40 + (-30)}{1 + 1} = 5A$



Convention : Les E et les I fléchés dans le m^eme sens que les I

La puissance fournie par le moteur est de la puissance mécanique $E' I_2 = -200$

$$E'' I_2 = -200$$

$$E - rI = E'' - r'' I_2 - R I_2$$

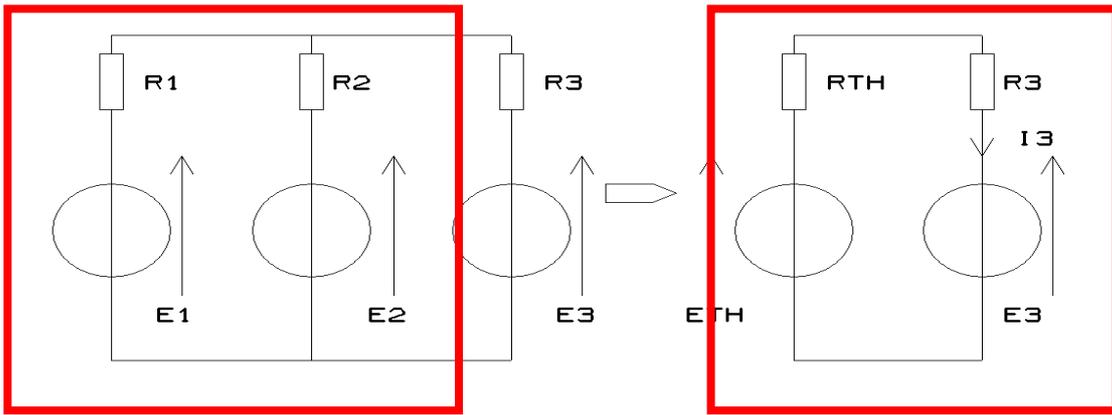
$$E - rI = E' - r' I_1 \quad \text{La résolution du système conduit à } R = 0,75 \Omega$$

$$I + I_1 + I_2 = 0$$

$$I_1 = 0$$

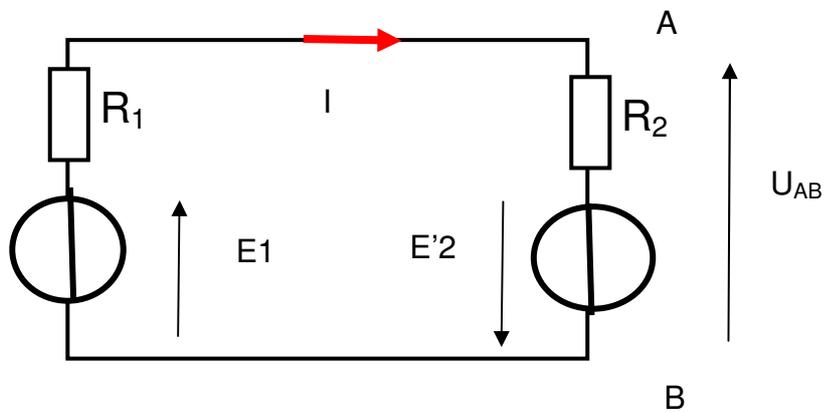
*** Exercice 3** : Application du Théorème de Thévenin

Le dipôle remplacé par un dipôle de Thévenin est le dipôle encadré.



Calcul de E_{th}

On oriente E_1 et E'_2 ($E'_2 = -E_2$) dans le même sens que I



$$\text{D'après la loi de Pouillet} \quad I = \frac{E_1 + E'_2}{R_1 + R_2}$$

$$U_{AB} = -E'_2 + R_2 I$$

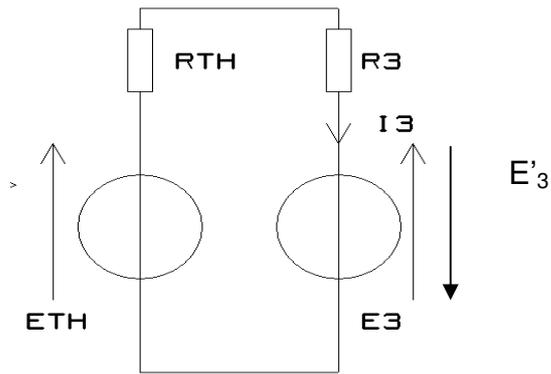
$$U_{AB} = -(-15) + 4 \frac{(20 + (-15))}{(3 + 4)} = 17,86 \text{ V}$$

$$E_{th} = 17,86 \text{ V}$$

Calcul de R_{th}

C'est la résistance équivalente à R_1 et R_2 en // $R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1,71 \Omega$

Calcul de I_3



D'après la loi de Pouillet

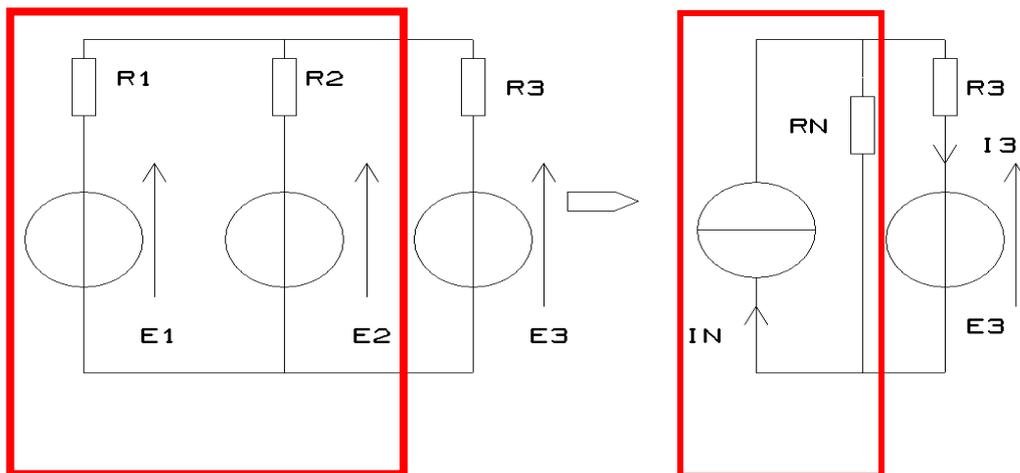
Eth et E'3 (E'3 = - E3) sont fléchées dans le même sens que I

$$I_3 = \frac{E_{th} + E'_3}{R_{th} + R_3} = \frac{E_{th} - E_3}{R_{th} + R_3}$$

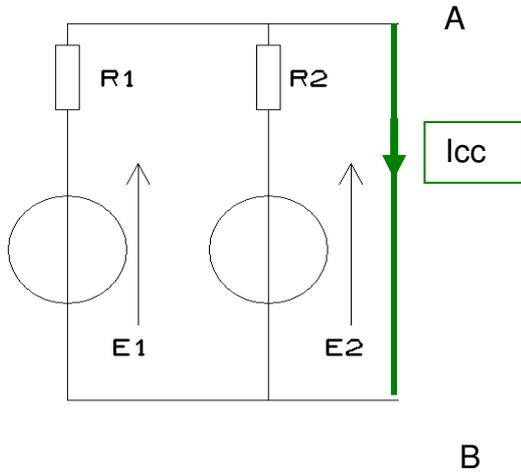
$$I_3 = \frac{17,86 - 8}{1,71 + 5} = 1,47A$$

* Exercice 4 : Application du Théorème de Norton

Le dipôle remplacé par un dipôle de Norton est encadré.



Calcul de I_N : le dipôle est mis en court-circuit.



On démontre que : $I_{cc} = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$ $I_{cc} = \frac{20}{3} + \frac{15}{4} = 10,42 \text{ A}$

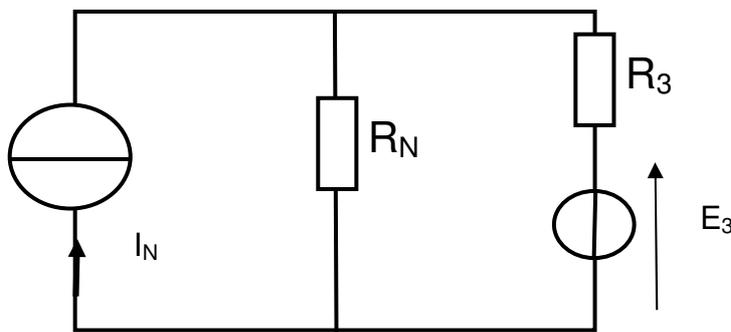
$I_N = 10,42 \text{ A}$

Calcul de R_N

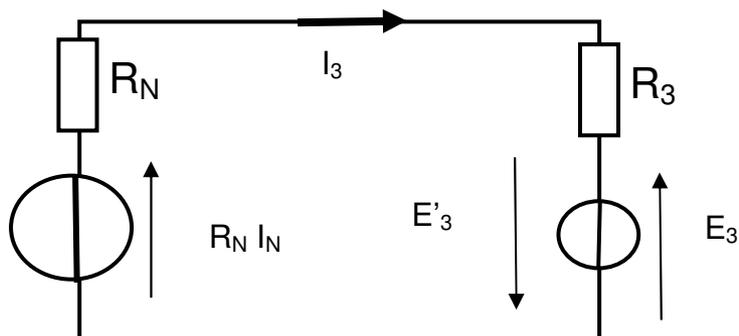
C'est la résistance équivalente à R_1 et R_2 en //

$R_N = R_{th} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 1,71 \Omega$

Calcul de I_3



On transforme le dipôle de Norton en dipôle de thévenin



L'application de la loi de Pouillet conduit à

$$I_3 = \frac{R_N I_N + E'_3}{R_N + R_3} = \frac{R_N I_N - E_3}{R_N + R_3} \quad I_3 = 1,47 \text{ A}$$

.5.9.1 * Exercice 5

Application du Théorème de superposition

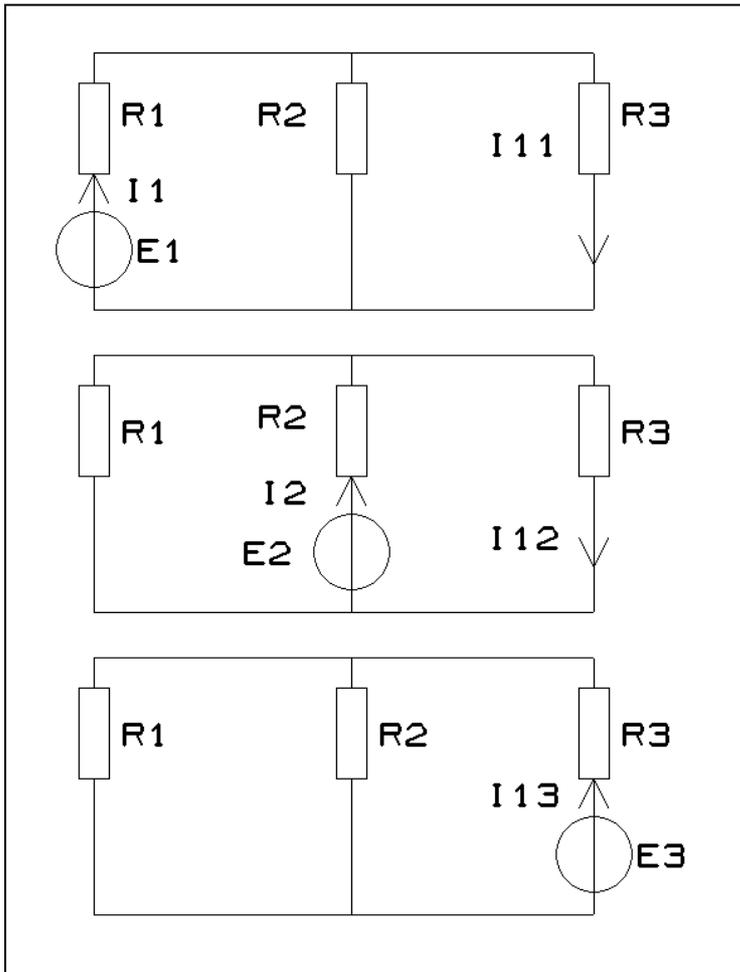


Schéma 1 : On remplace R_1 et R_2 par leur résistance équivalente puis on applique la loi de Pouillet puis la relation du diviseur d'intensité

$$I_1 = \frac{E_1}{\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_1} \quad I_{11} = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}$$

$$I_{11} = \frac{E_1 R_2}{R_2 R_3 + R_1 (R_2 + R_3)}$$

Schéma 2

$$I_{12} = \frac{E_2 R_1}{R_1 R_3 + R_2 (R_1 + R_3)}$$

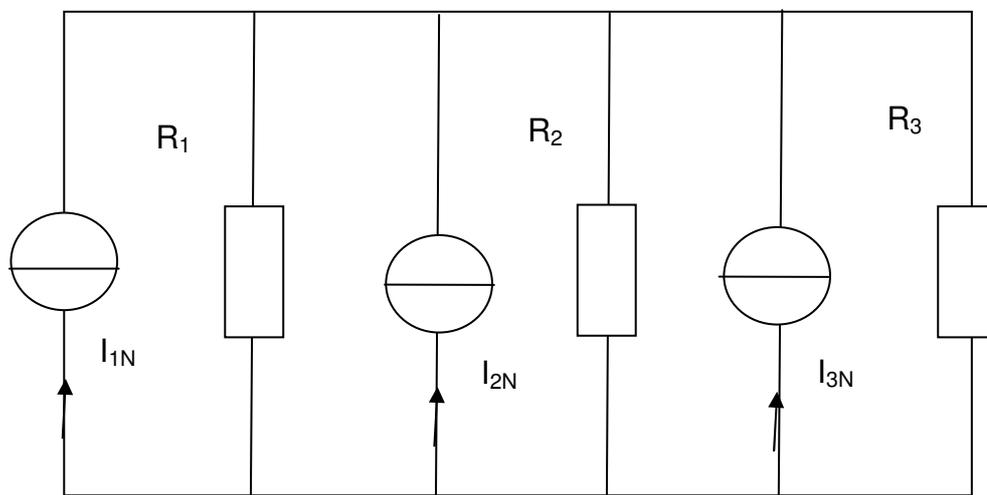
Schéma 3

$$I_{13} = \frac{E_3}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_3}$$

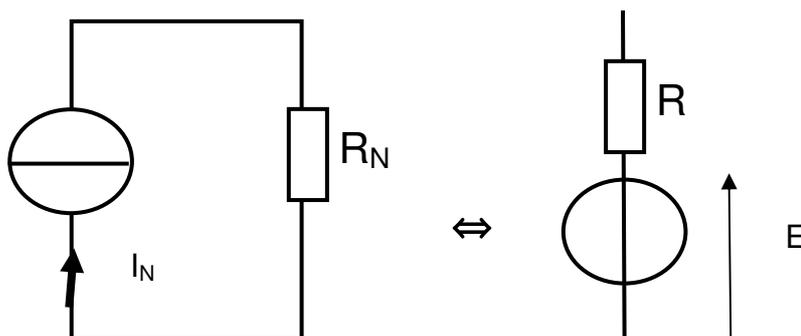
L'intensité recherchée est, par application du théorème de superposition égale à $I_{11} + I_{12} - I_{13}$

.5.9.2 Exercice7

On transforme les trois dipôles en dipôles de Norton



Cet ensemble peut être remplacé par un seul dipôle de Norton. Ce dernier est ensuite remplacé par le dipôle de Thévenin équivalent



$$\frac{1}{R_N} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \quad R = R_N = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}}$$

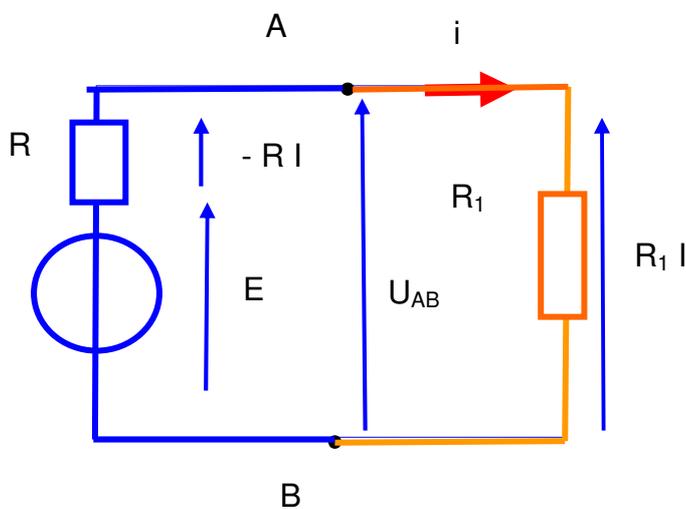
$$I_N = I_{1N} + I_{2N} + I_{3N} \quad I_N = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} + \frac{E_3}{R_3}$$

$$E = R_N I_N = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{E_i}{R_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}}$$

.CHAPITRE 6 DETERMINATION GRAPHIQUE DU POINT DE FONCTIONNEMENT D'UN CIRCUIT

.6.1 CAS DE DIPOLES LINEAIRES

On associe deux dipôles AB pour former le circuit suivant :

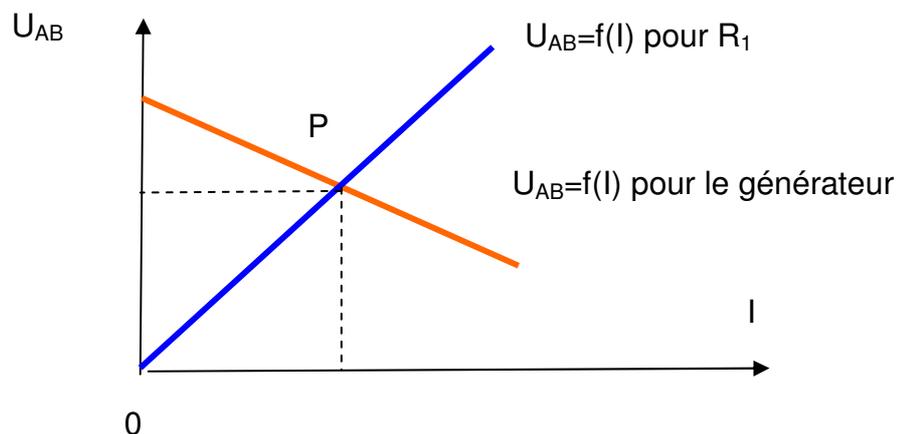


Point de fonctionnement du circuit

Chaque dipôle a une caractéristique $U_{AB}=f(I)$ qui lui est propre.

Lorsque les deux dipôles sont associés et forment un circuit, U_{AB} et I prennent des valeurs déterminées. Ces valeurs sont les coordonnées du point P, intersection des deux caractéristiques.

P est appelé point de fonctionnement du circuit



Etant donné que les deux dipôles sont linéaires, il suffit de résoudre le système suivant pour déterminer les coordonnées de P :

$$U_{AB} = E - R I \quad U_{AB} = R_1 I$$

.6.2 CAS OU L'UN DES DIPOLES N'EST PAS LINEAIRE

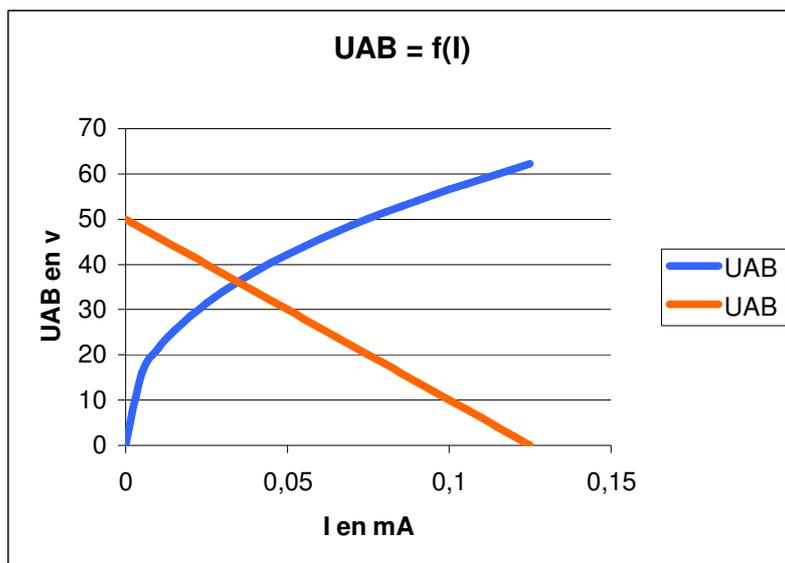
On associe un dipôle linéaire générateur et un dipôle non linéaire (varistance)

La varistance est un conducteur ohmique dont la résistance n'est pas constante et varie avec la tension appliquée.

Le générateur a pour force électromotrice 50 V et pour résistance interne 400 Ω

A l'aide d'un générateur auxiliaire fournissant une tension continue réglable appliquée aux bornes de la varistance seule, on a obtenu, pour la varistance, les résultats suivants :

U_{AB}	0	16	29	36	46	51	57	61
en								
V								
I en	0	5	20	35	60	80	100	120
mA								



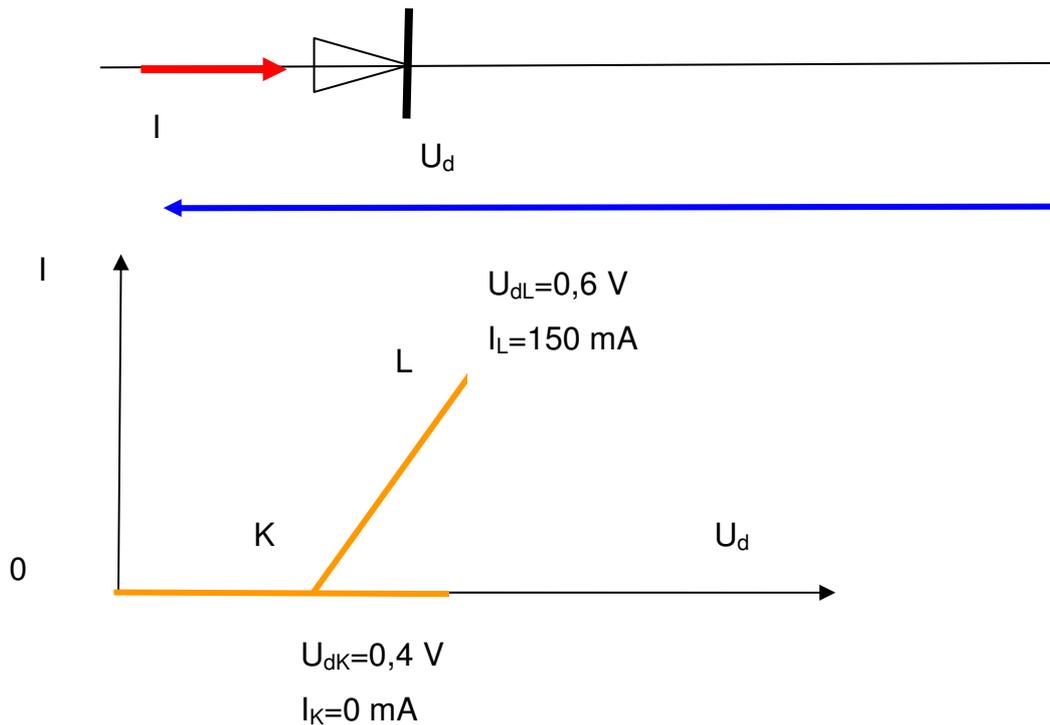
Les coordonnées de P sont : 35 mA et 36 V

On pourrait déterminer ces valeurs par le calcul si l'on connaissait l'équation de la caractéristique de la varistance.

.6.3 EXERCICES

* Exercice 1

On branche en série un générateur de fem $E = 1,5 \text{ V}$ et de résistance interne 10Ω et une diode à jonction dont la caractéristique linéarisée est donnée ci-après:



Déterminer par le calcul et graphiquement les coordonnées du point de fonctionnement lorsque la diode est placée dans le sens passant dans le circuit.

* Exercice 2

On place la varistance utilisée dans le cours en parallèle avec une résistance $R = 5 \text{ k}\Omega$.

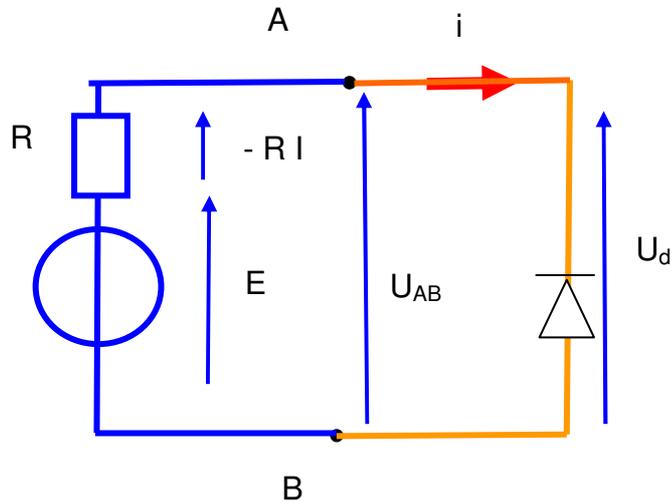
L'ensemble est alimenté par un générateur de fem $E = 50 \text{ V}$ et de résistance interne 400Ω .

Déterminer graphiquement le point de fonctionnement du circuit

.6.4 CORRIGES

.6.4.1 Corrigé de l'exercice 1

.6.4.1.1 Montage



.6.4.1.2 Détermination par le calcul

Equation de la droite KL $U_d = aI + b$

$$0,4 = b \quad 0,6 = a \times 0,15 + 0,4 \quad a = 1,33$$

$$U_{AB} = U_d \quad E - R I = 1,33 I + 0,4$$

$$1,5 - 10 I = 1,333 I + 0,4 \quad I = 0,097 \text{ A}$$

$$U_{AB} = 1,5 - 10 \times 0,097 = 0,53 \text{ V}$$

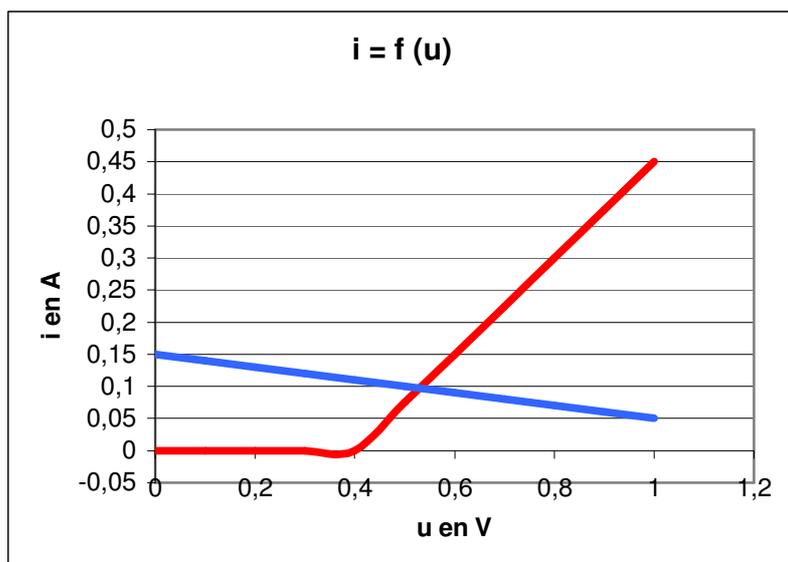
.6.4.1.3 Détermination graphique

$$U_{AB} = 1,5 - 10 I \quad I = 0,1 (1,5 - U_{AB})$$

On trace les graphes de $i = f(U)$ pour le générateur et pour la diode.

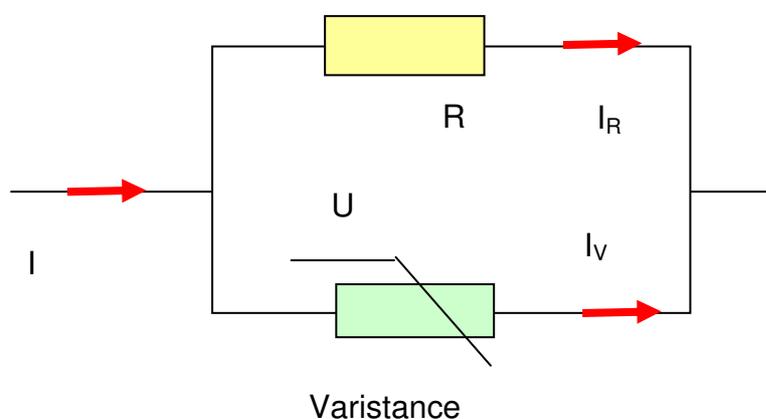
On relève les coordonnées de l'intersection des deux droites

$$I = 0,1 \text{ A} \quad U \approx 0,5 \text{ V}$$



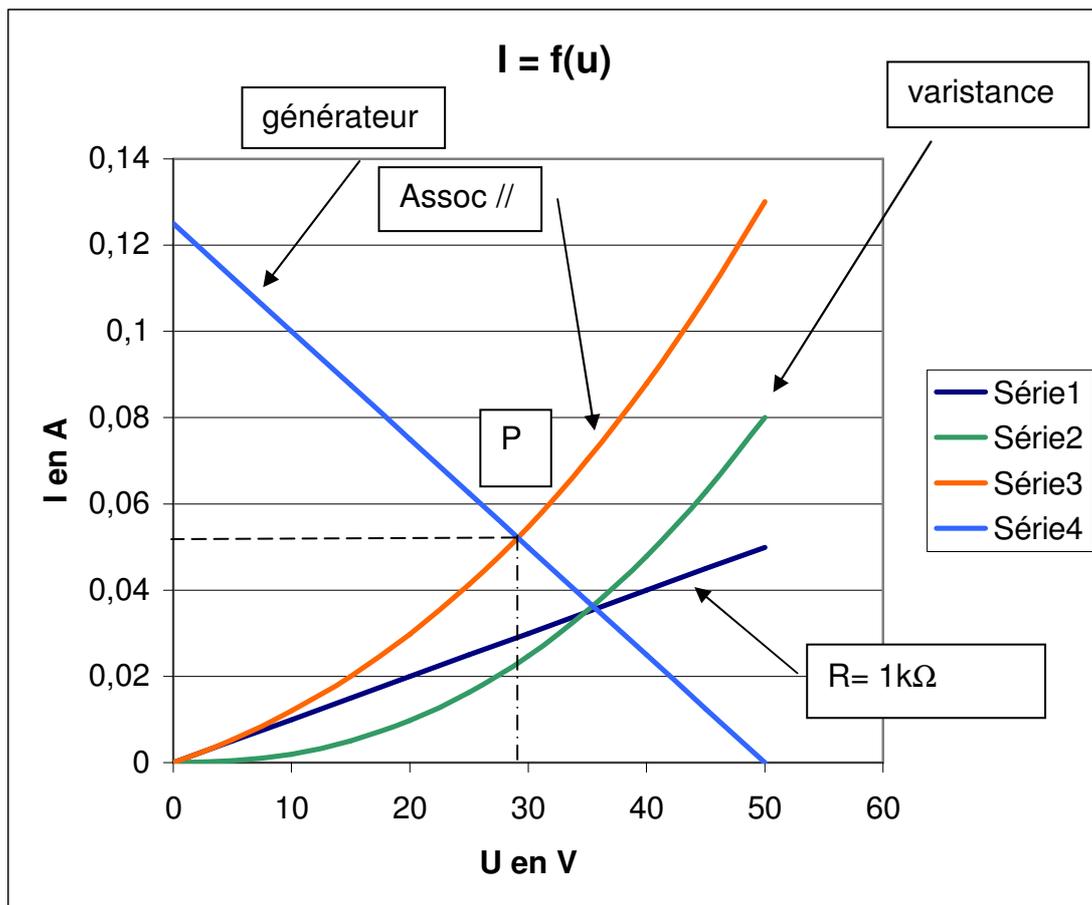
.6.4.2 Corrigé de l'exercice 2

On considère l'association en parallèle de la résistance R et de la varistance ; ces deux dipôles sont soumis à la même tension ; l'intensité $I = I_R + I_V$.



Graphiquement il suffit pour une valeur de la tension U de tracer le point dont l'ordonnée est $I = I_R + I_V$. Le point de coordonnées I et U est l'un des points de la caractéristique de l'association (R et varistance). Point par point, on peut tracer cette caractéristique.

Le point de fonctionnement du circuit est l'intersection de la caractéristique du générateur et de celle de l'association.



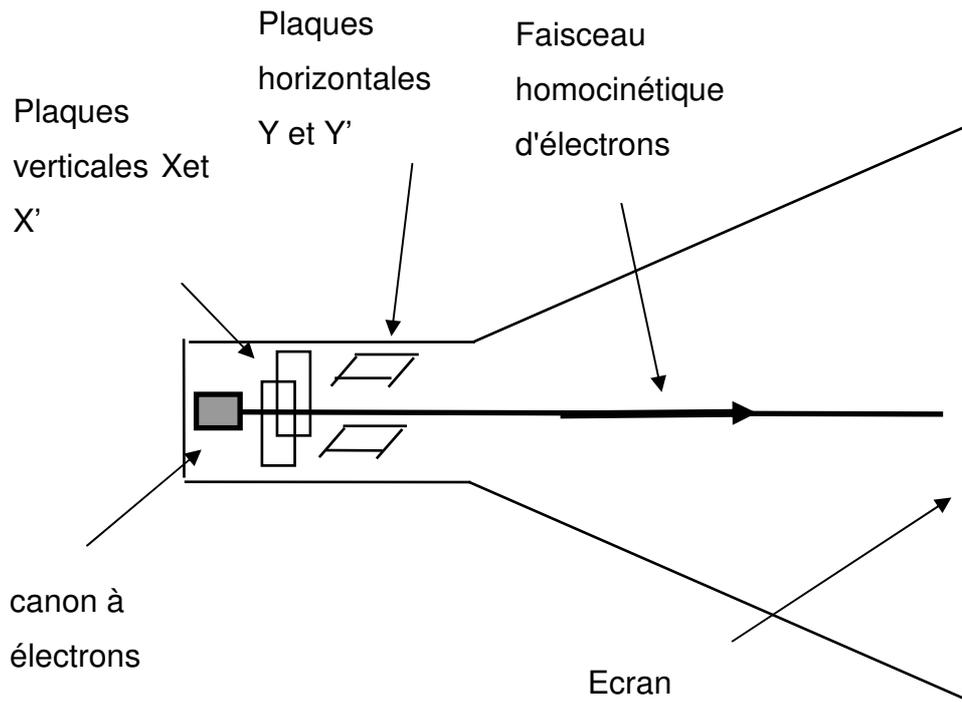
Les coordonnées du point de fonctionnement sont $I = 55 \text{ mA}$ et $U = 29 \text{ V}$

.CHAPITRE 7 L'OSCILLOSCOPE.

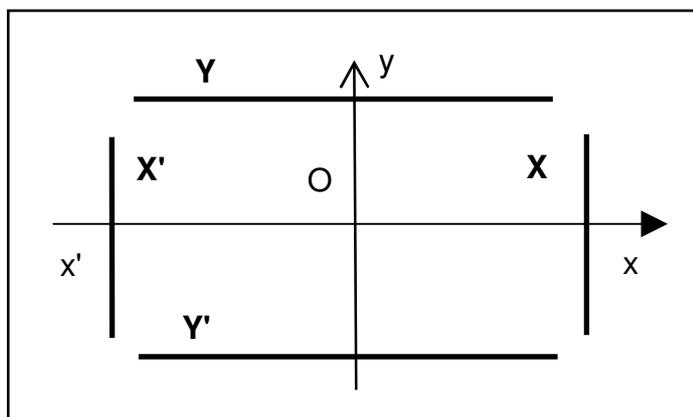
.7.1 DESCRIPTION DU TUBE CATHODIQUE.

.7.1.1 Schémas

vue de coté:



vue de face:



A l'intérieur du tube la pression du gaz est extrêmement faible. Des électrons sont émis par une cathode chauffée et accélérés; ils forment un faisceau homocinétique d'électrons qui vient frapper l'écran. L'impact du faisceau avec la substance spéciale qui revêt l'intérieur de l'écran provoque l'émission de lumière.

A l'intérieur du tube sont disposées deux plaques métalliques verticales (X' et X) et deux plaques métalliques horizontales (Y' et Y) entre lesquelles passe le faisceau.

Si aucune tension n'est appliquée entre ces deux jeux de plaques, un point lumineux (le spot) apparaît au centre O de l'écran.

Si une tension est appliquée entre les plaques X' et X , le spot est dévié horizontalement suivant l'axe $x'x$.

Si une tension est appliquée entre les plaques Y' et Y , le spot est dévié verticalement suivant l'axe $y'y$.

Si des tensions sont appliquées simultanément entre les plaques $X'X$, et $Y'Y$, le spot est dévié dans le plan xOy .

.7.1.2 Balayage.

Lorsqu'on branche l'oscilloscope sur le secteur sans établir d'autres connexions, le balayage fonctionne: une tension est automatiquement appliquée entre les plaques X' et X . Le spot se déplace horizontalement à vitesse constante que l'on peut régler en tournant le bouton "base de temps". Arrivé à l'extrême droite de l'écran, le spot est ramené quasi instantanément à l'extrême gauche puis il se déplace à nouveau d'un mouvement uniforme vers la droite de l'écran.

La période de balayage est la durée nécessaire pour que le spot se déplace entre l'extrême gauche de l'écran et l'extrême droite. Sa valeur est réglable entre quelques secondes et une μs environ. Ce n'est pas la période de balayage qui est indiquée sur le bouton mais la durée que met le spot pour parcourir une division horizontale de l'écran. La sensibilité horizontale s'exprime en ms / div

En fait il existe deux boutons permettant de faire varier la sensibilité horizontale :

l'un permet de faire varier la sensibilité de manière discontinue et porte les indications correspondantes.

L'autre ne porte pas d'indication et permet une variation continue de la sensibilité entre deux valeurs indiquées par le premier.

Pour toute mesure de période, il est impératif de positionner correctement (par exemple tourner à fond à gauche ce bouton) pour que les indications des sensibilités soient correctes.

Lorsque la période est grande, l'œil peut parfaitement suivre le déplacement horizontal du spot de la gauche vers la droite. Lorsqu'elle est petite, l'œil ne peut plus suivre le mouvement et voit un trait horizontal dû à la persistance des impressions lumineuses sur la rétine.

Plus la vitesse du spot est grande, plus le trait observé est net.

.7.2 VISUALISATION ET MESURE D'UNE TENSION CONTINUE

.7.2.1 Réglage préliminaire.

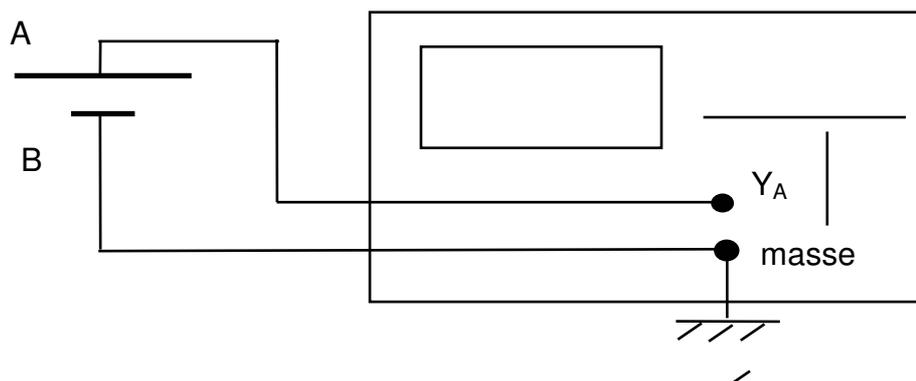
Utiliser un balayage permettant de voir une trace horizontale nette.

Ne pas appliquer de tension entre les plaques Y' et Y.

Appuyer sur Y_A pour enclencher la voie A. Amener la trace horizontale au centre de l'écran. Placer alors le sélecteur sur la position mesure en continu [=]. Le réglage du zéro est effectué.

.7.2.2 Montage .

Relier le générateur 6 V – continu à l'oscilloscope.



.7.2.3 Observation.

La tension aux bornes du générateur est appliquée entre Y_A et la masse. Agir sur la sensibilité verticale de la voie A (en V/div) de manière à obtenir un déplacement suffisant de la trace.

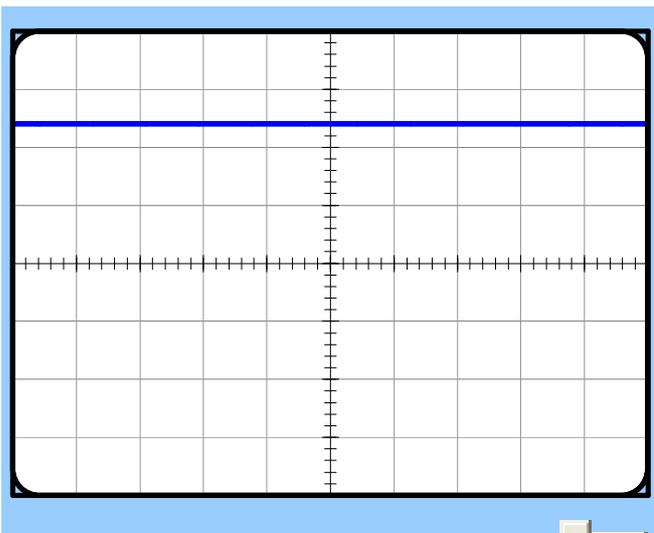
Si on supprime le balayage (ce qui n'est pas du tout recommandé pour le tube de l'oscilloscope), on observe un point lumineux vers le haut de l'écran si $U_{AB} > 0$ et si A et B sont reliés à l'oscilloscope comme indiqué sur le schéma.

Le déplacement du spot se fait verticalement vers le bas de l'écran si $U_{AB} < 0$

Si le balayage est appliqué (fonctionnement normal), on observe un trait horizontal situé vers le haut ou vers le bas de l'écran suivant le signe de la tension appliquée.

.7.2.4 Mesure de la tension

Exemple.



Si la sensibilité verticale est 2 V / div

$$U_{AB} = + 2,4 \times 2 = 4,8 \text{ V}$$

Si la trace était située 2,4 div en dessous de la trace de référence, la tension serait égale à $- 4,8 \text{ V}$

.7.3 VISUALISATION D'UNE TENSION PERIODIQUE

.7.3.1 Réglage préliminaire.

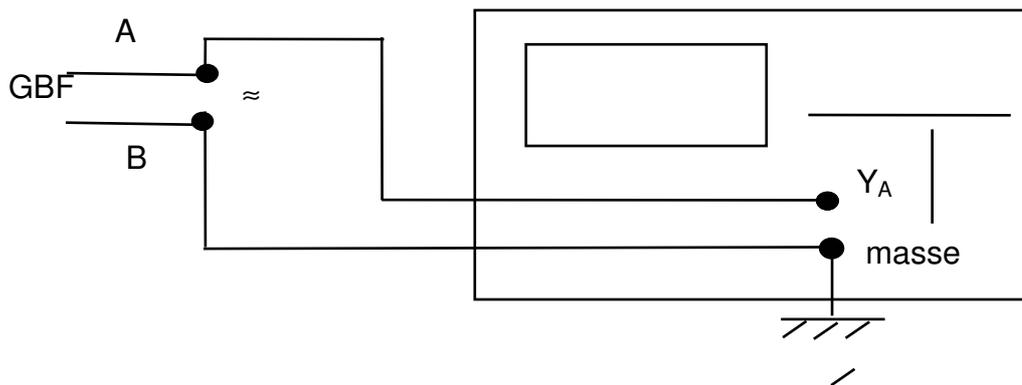
Utiliser un balayage permettant de voir une trace horizontale nette.

Ne pas appliquer de tension entre les plaques Y' et Y.

Appuyer sur Y_A pour enclencher la voie A. Amener la trace horizontale au centre de l'écran. Placer alors le sélecteur sur la position mesure en régime variable [~]. Le réglage du zéro est effectué.

.7.3.2 Montage .

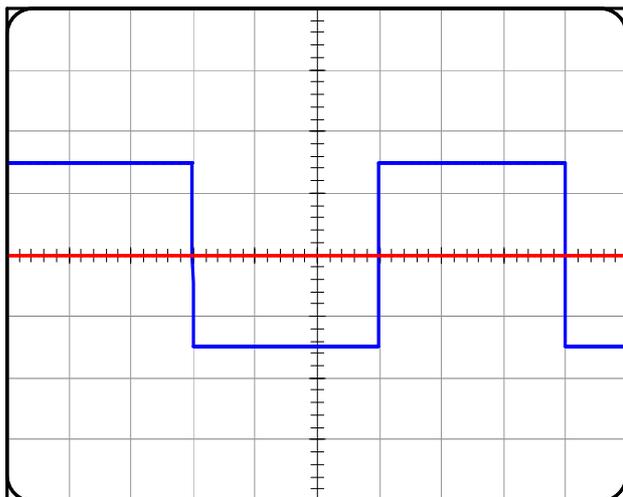
Relier le générateur basse fréquence (GBF) à l'oscilloscope.



.7.3.3 Observations.

Sur l'écran apparaît la courbe représentative de $u_{AB}=f(t)$

Exemple :



Si la sensibilité horizontale est de 10 ms/ div et la sensibilité verticale de 5 V/div, on en déduit que la période de la tension, qui correspond horizontalement à 6 div vaut 60 ms.

Lorsque cette tension a sa valeur maximale, elle vaut $1,5 \times 5 = 7,5$ V

Lorsque cette tension a sa valeur minimale, elle vaut $-1,5 \times 5 = -7,5 \text{ V}$

.7.4 UTILISATIONS D'UN OSCILLOSCOPE.

L'oscilloscope peut être utilisé dans de nombreux domaines pour étudier des phénomènes périodiques dont les variations peuvent se traduire par la variation d'une tension appliquée entre les plaques Y' et Y.

L'oscilloscope le plus courant est l'oscilloscope bicourbe ; il permet de visualiser deux tensions périodiques: l'une est appliquée entre Y_A et la masse, l'autre entre Y_B et la masse. On peut ainsi comparer les variations de ces deux tensions au cours du temps.

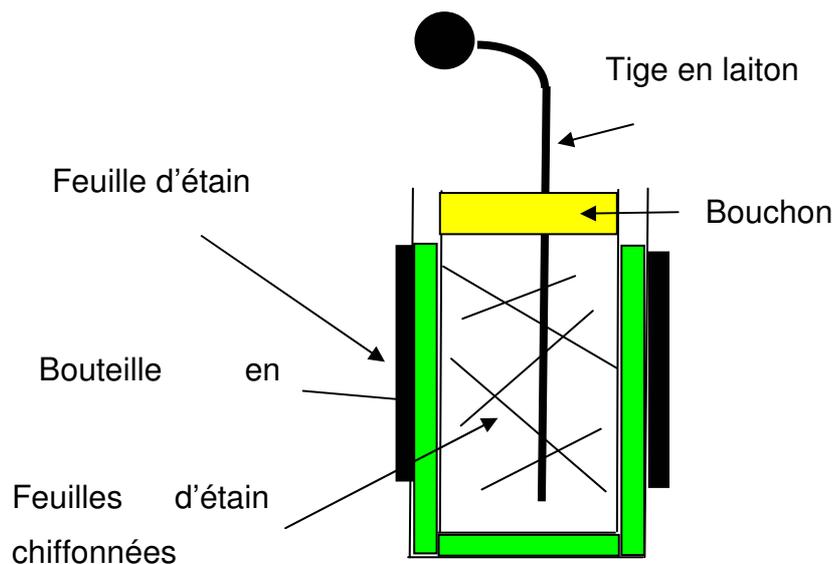
CONDENSATEURS ET BOBINES

.CHAPITRE 8 CONDENSATEURS

.8.1 GENERALITES

.8.1.1 Historique

Le premier condensateur a été conçu en Hollande à Leyde en 1745 et porte le nom de bouteille de Leyde. Ce condensateur était constitué d'une bouteille revêtue à l'extérieur d'une feuille d'étain et contenant de l'eau dans laquelle trempait une tige de laiton. L'eau fut très vite remplacée par des feuilles d'étain chiffonnées. L'Abbé Nollet, physicien, réalisa une expérience en 1746 en présence de Louis XV : il chargea le condensateur puis le déchargea dans une file de 240 hommes de la Garde, lesquels reçurent une très violente secousse.



.8.1.2 Constitution.

.8.1.2.1 Condensateur plan.

Un condensateur plan est constitué de deux plaques métalliques conductrices parallèles (armatures) séparées par un milieu isolant (diélectrique).
exemples de diélectriques : air, mica, verre, polyester, téflon, les céramiques (exemple le titanate de baryum $BaTiO_3$) etc.

.8.1.2.2 Autres condensateurs.

La plupart des condensateurs ne sont pas plans ; ils sont souvent cylindriques mais il existe une grande variété de condensateurs de formes très diverses.

Remarque : certains condensateurs sont polarisés c'est-à-dire qu'ils présentent une borne d'entrée et une borne de sortie du courant.

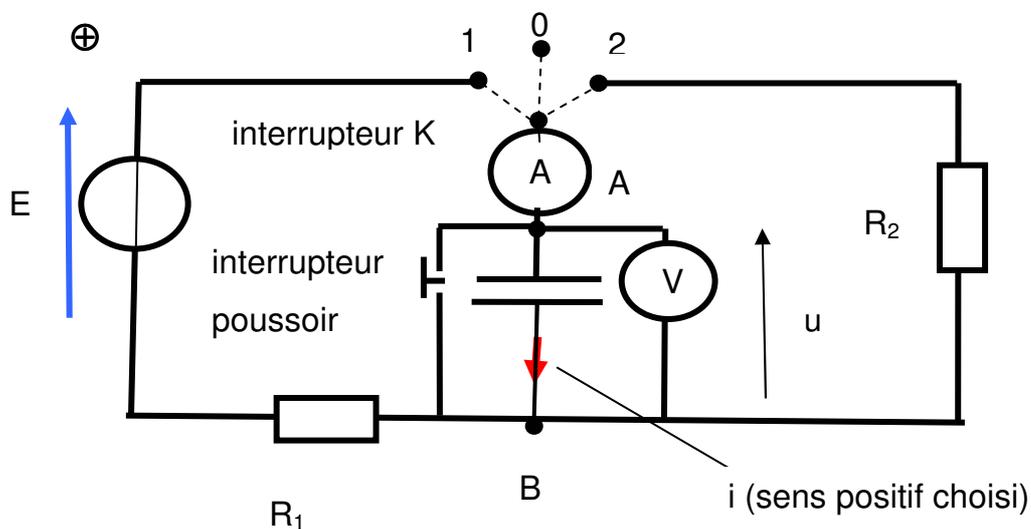
.8.1.3 Représentation symbolique.

Quelle que soit sa forme, un condensateur non polarisé est représenté par le symbole suivant :



.8.2 ACTIVITE 1 - ETUDE EXPERIMENTALE DE LA CHARGE ET DE LA DECHARGE D'UN CONDENSATEUR.

On réalise le montage suivant



L'interrupteur K relie la borne supérieure de l'ampèremètre à l'une des bornes 1, 0 ou 2

L'interrupteur poussoir relie les points A et B lorsque l'on appuie sur le poussoir.

R_1 et R_2 sont des résistances de grandes valeurs.

.8.2.1 Charge du condensateur

L'interrupteur K étant en position 0, on appuie sur le poussoir de manière à ce que le voltmètre affiche 0 et on le relâche. On bascule alors l'interrupteur K en position 1.

On observe alors un régime transitoire pendant lequel l'intensité i (positive) du courant diminue et la tension u (positive) aux bornes du condensateur augmente.

Le régime permanent est obtenu lorsque ces grandeurs ne varient plus ; l'ampèremètre affiche alors zéro et le voltmètre montre que la tension aux bornes du condensateur atteint E .

.8.2.2 Condensateur chargé

On place ensuite l'interrupteur K en position zéro. L'ampèremètre indique zéro. La tension devrait rester constante mais l'isolant n'étant pas parfait, l'air entourant le condensateur n'étant pas rigoureusement isolant et le voltmètre n'ayant pas une résistance infinie, la tension diminue très légèrement et progressivement au cours du temps.

On peut considérer, si on ne maintient pas cette phase longtemps, que le condensateur garde sa charge et que la tension entre ses bornes est constante et égale à E

.8.2.3 Décharge du condensateur.

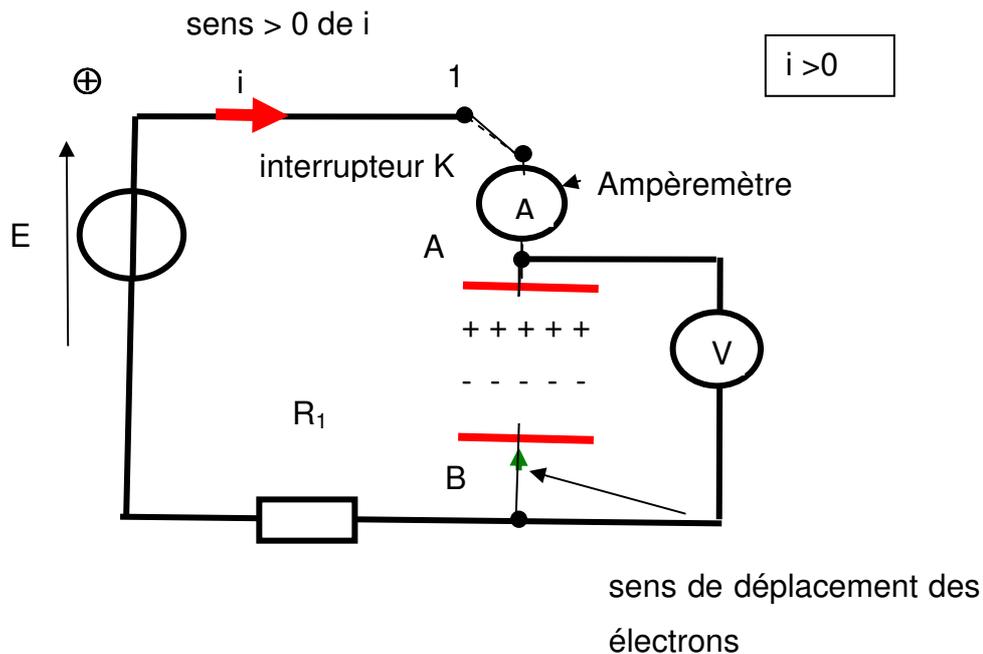
On place ensuite l'interrupteur K en position 2.

L'ampèremètre montre que le courant change de sens, que l'intensité est maintenant négative, qu'elle augmente et tend vers zéro. La tension relevée par le voltmètre diminue et passe progressivement de E à zéro. Tant que u et i varient au cours du temps, le régime est transitoire ; lorsqu'elles ne varient plus le régime est stationnaire ou permanent.

.8.3 INTERPRETATION.

.8.3.1 Interprétation de la charge:

les armatures sont métalliques et l'on sait que dans un métal des électrons subissent moins l'influence du noyau de l'atome et se déplacent au sein du métal.



Lors du régime transitoire, l'intensité du courant i est positive ; ce courant est un déplacement d'électrons qui s'effectue en sens inverse du courant. Des électrons sont arrachés à l'armature métallique A et d'autres pendant le même temps arrivent en nombre égal et s'accumulent sur l'armature B. Les électrons ne traversent pas l'isolant considéré comme parfait et sont mis en mouvement par l'action du générateur.

L'accumulation d'électrons sur l'armature B crée une charge $q_B < 0$. Le défaut d'électrons sur l'armature A crée une charge q_A . C'est la raison pour laquelle le composant est appelé condensateur car il permet de condenser des charges sur ses armatures.

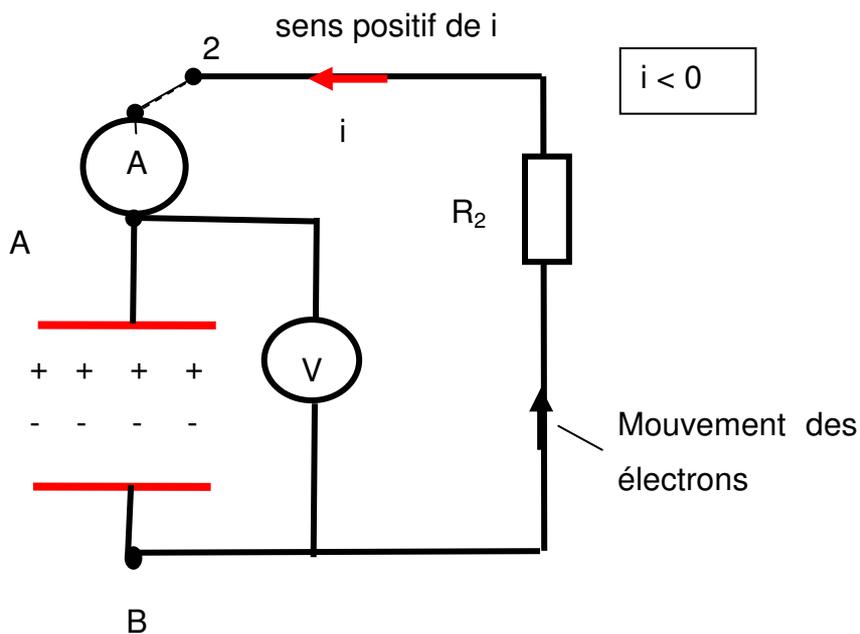
On appelle q charge du condensateur.

$$q_A = q \quad \text{et} \quad q_B = -q \quad (\text{en coulombs}).$$

Remarque: les charges sont localisées sur les surfaces en regard des armatures. Sur le schéma elles apparaissent dans l'isolant mais il faut comprendre que ces charges sont en fait disposées superficiellement sur les armatures.

.8.3.2 Interprétation de la décharge:

Le condensateur est chargé :il y a accumulation de charges négatives (électrons) sur l'armature B et accumulation de charges positives (en réalité défaut d'électrons) sur l'armature A. Lorsque les armatures sont reliées par une chaîne conductrice, les électrons accumulés sur B, traversent la résistance et viennent progressivement combler le déficit électronique de l'armature A. En effet, seuls les électrons peuvent se déplacer et ils ne peuvent pas traverser l'isolant.

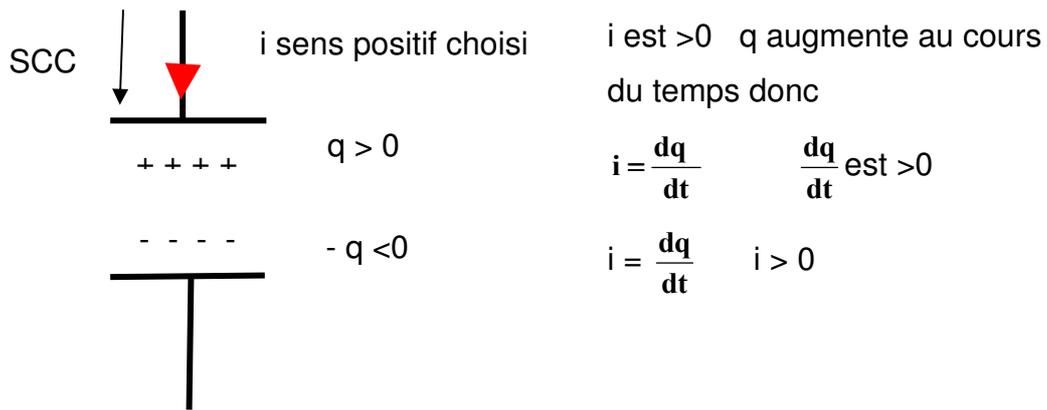


.8.4 RELATION ENTRE INTENSITE DU COURANT ET CHARGE DU CONDENSATEUR.

.8.4.1 Au cours de la charge du condensateur :

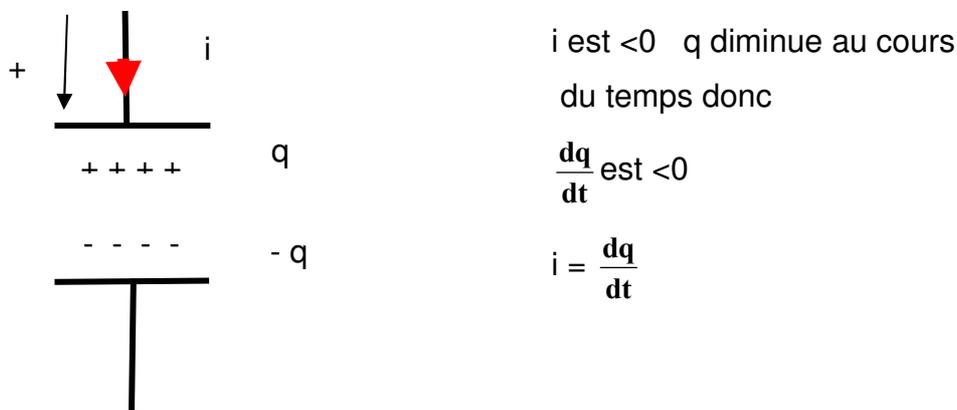
Le sens positif choisi pour l'intensité du courant est noté sur le schéma
Lorsque le courant circule pendant dt très petit, la charge du condensateur s'accroît de dq et l'on peut supposer que l'intensité est constante pendant dt :on peut alors écrire $dq = i dt$ et par conséquent

$$i = \frac{dq}{dt}$$



.8.4.2 Au cours de la décharge du condensateur :

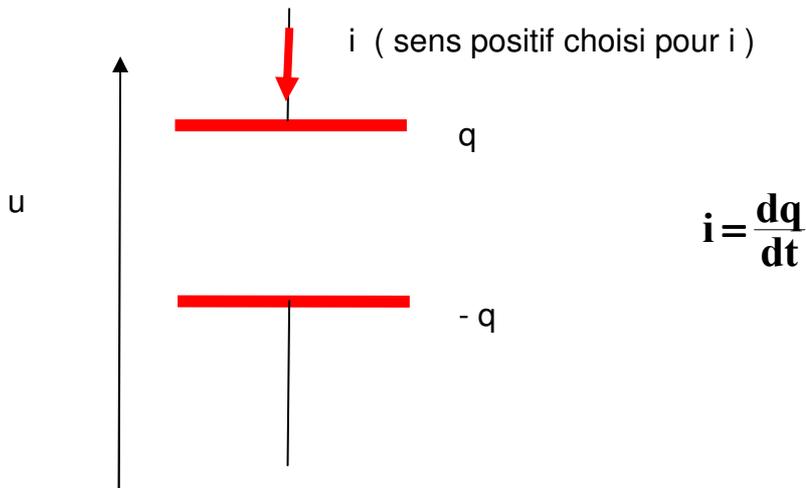
On conserve le même sens positif



.8.4.3 Conclusion :

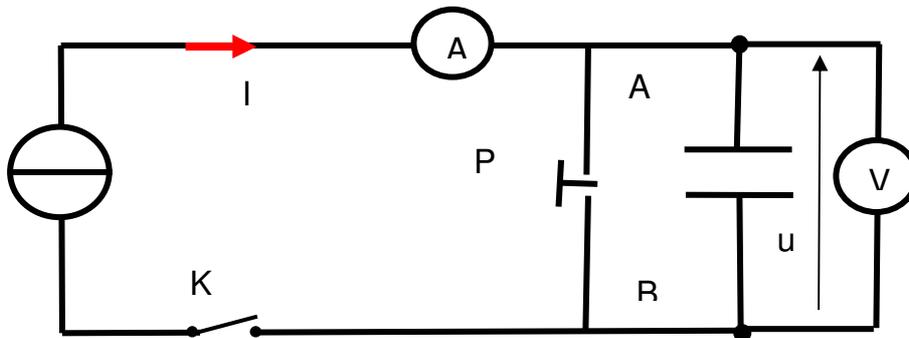
Dans les deux cas $i = \frac{dq}{dt}$

q étant la charge du condensateur et l'intensité étant > 0 pour un courant circulant vers l'armature portant cette charge



□ Exercice 1

.8.5 ACTIVITE 2 - CAPACITE D'UN CONDENSATEUR.



.8.5.1 Manipulation

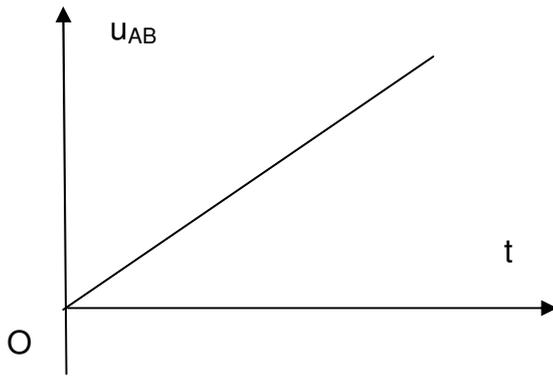
Le générateur fournit un courant d'intensité I constante. Après avoir fermé l'interrupteur K , on règle l'intensité à la valeur désirée.

On ouvre l'interrupteur et on actionne le poussoir P de manière à décharger le condensateur.

A l'instant $t=0$ on déclenche le chronomètre et à intervalle de temps réguliers on relève, en cours de charge, la tension u_{AB} aux bornes du condensateur en s'assurant que l'intensité reste constante.

.8.5.2 Résultats

La courbe représentative de $u_{AB}=f(I)$ est une droite passant par l'origine



.8.5.3 Conclusion

L'équation de cette droite est $u_{AB} = k t$

L'intensité étant constante, la quantité d'électricité qui a circulé dans le circuit entre $t=0$ et t est $q = q_A = I t$

On en déduit la relation : $q_A = I t = I \frac{u_{AB}}{k} = \frac{I}{k} u_{AB} = C u_{AB}$ I et k sont constants.

La charge q_A de l'armature A d'un condensateur soumis à une tension u_{AB} est donnée à chaque instant par la relation $q_A = C u_{AB}$

C est une constante de valeur positive qui ne dépend que du condensateur utilisé ; c'est la capacité du condensateur.

q en C u_{AB} en V C en F (farad)

Pour une tension appliquée donnée, plus le condensateur a une grande capacité plus sa charge est importante.

Le Farad est une capacité importante ; bien souvent les capacités s'expriment en pF, μ F ou mF.

□ exercice 2

.8.5.4 Relation entre i et u

Lorsqu'un condensateur se charge ou se décharge dans un circuit parcouru par un courant d'intensité i , on peut écrire, sous réserve d'appliquer les conventions de signe vues précédemment :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu)}{dt} = C \frac{du}{dt}$$

□ Exercice 3

.8.6 TENSION DE SERVICE D'UN CONDENSATEUR.

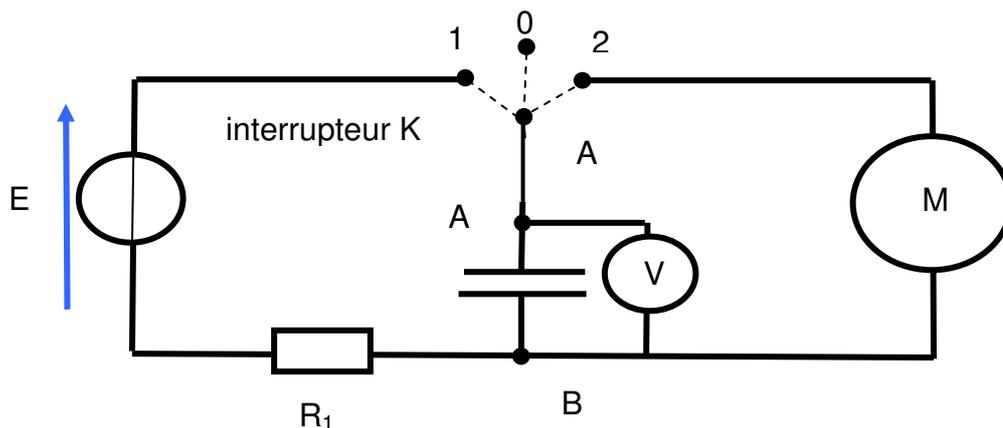
On ne peut pas appliquer à un condensateur une tension trop grande sans risquer de détruire l'isolant (claquage du condensateur).

Les fabricants indiquent sur les condensateurs, la tension de service. Cette tension, bien inférieure à la tension de claquage est la valeur à ne pas dépasser de manière à ce que le condensateur ne soit pas endommagé.

.8.7 ACTIVITE 3 - ENERGIE EMMAGASINEE PAR UN CONDENSATEUR.

.8.7.1 Expérience

On réalise le montage suivant



L'interrupteur est placé en position 1 : le condensateur se charge.

Lorsqu'il est chargé, on bascule l'interrupteur en 2 ; le moteur tourne et permet de soulever une charge.

.8.7.2 Interprétation

Le condensateur a emmagasiné de l'énergie au cours de la première phase, énergie qu'il a restituée au cours de la seconde.

.8.7.3 Expression de l'énergie

Lors de la charge d'un condensateur, pendant dt le condensateur reçoit de l'énergie par travail électrique

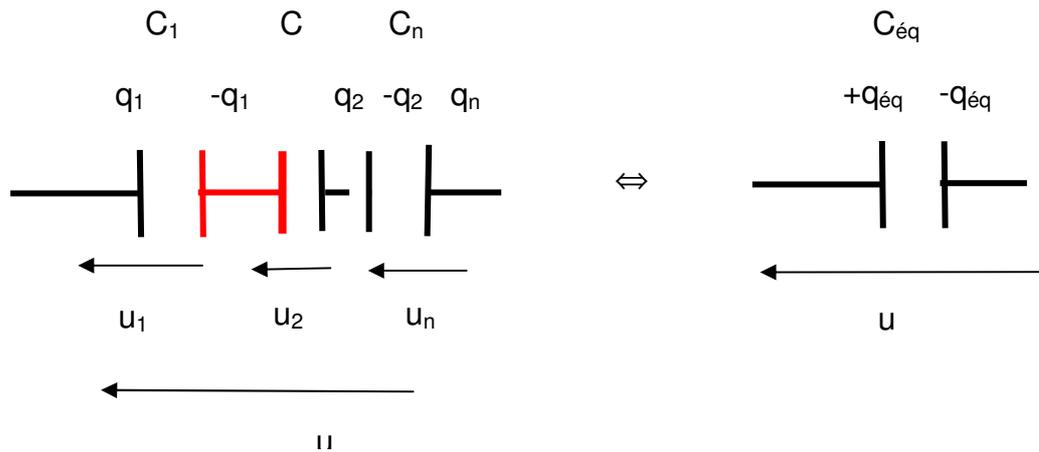
Entre $t=0$, début de la charge et t , il reçoit $W = \int_0^t C u du = \left[\frac{C u^2}{2} \right]_0^U = \frac{C \cdot U^2}{2}$

L'énergie emmagasinée par un condensateur chargé sous une tension u est

$$E = \frac{C u^2}{2} = \frac{C u u}{2} = \frac{q u}{2} = \frac{q \cdot q}{2 C} = \frac{q^2}{2C}$$

E en J u en V q en C C en F

.8.8 ASSOCIATION DE CONDENSATEURS EN SERIE



Le condensateur équivalent à un groupement de condensateurs est le condensateur unique qui, soumis à la même tension que le groupement, a même charge que le groupement

L'ensemble (en trait gras) formé par les deux armatures appartenant à deux condensateurs successifs et le fil qui les relie constitue un ensemble électriquement neutre ce qui permet d'écrire :

$$-q_1 + q_2 = 0 \quad \text{donc } q_1 = q_2$$

$$q_1 = q_2 = \dots = q_n$$

$$U = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$\frac{q_{\text{éq}}}{C_{\text{éq}}} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \dots + \frac{q_n}{C_n}$$

La loi de conservation de l'électricité permet d'écrire $q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_{\text{éq}}$

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

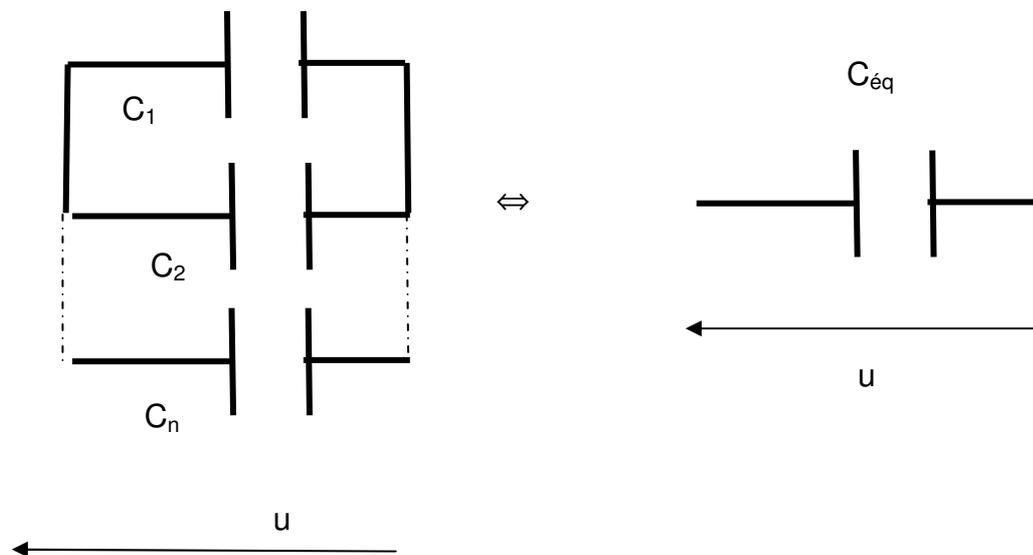
Remarques :

La capacité du condensateur équivalent est toujours plus petite que la plus petite des capacités des condensateurs montés en série.

Ce montage permet d'avoir une tension élevée aux bornes de l'association, chaque condensateur étant soumis à une tension plus faible qui sera inférieure à sa tension de service..

□ exercice 4

.8.9 ASSOCIATION DE CONDENSATEURS EN DERIVATION.



La loi de conservation de l'électricité permet d'écrire

$$q_1 + q_2 + \dots + q_n = q_{\text{éq}}$$

$$C_1 u + C_2 u + \dots + C_n u = C_{\text{éq}} u$$

$$C_1 + C_2 + \dots = C_n = C_{\text{éq}}$$

Remarques :

La capacité du condensateur équivalent est toujours plus grande que la capacité de l'un des condensateurs montés en dérivation.

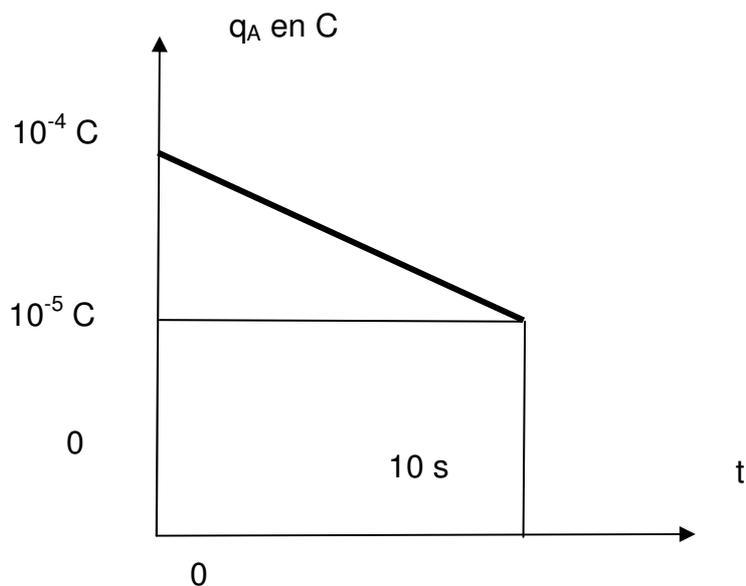
Dans ce montage tous les condensateurs sont soumis à la même tension. Il faut vérifier que cette tension commune est inférieure à la plus petite des tensions de service des condensateurs utilisés.

□ exercice 5

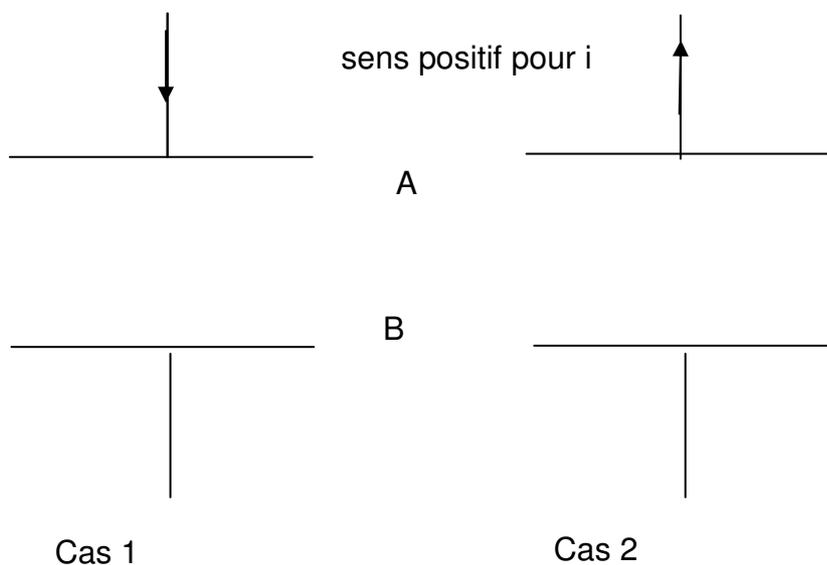
.8.10 EXERCICES

.8.10.1 □ Exercice 1

Un condensateur dont les armatures sont A et B se décharge. On donne la fonction $q_A = f(t)$ au cours de cette décharge.



Quelle est la valeur algébrique de l'intensité du courant dans les deux cas suivants ?



.8.10.2 □ Exercice 2

On effectue la charge d'un condensateur de capacité $C= 5 \mu\text{F}$ à l'aide d'un courant dont l'intensité I est constante.

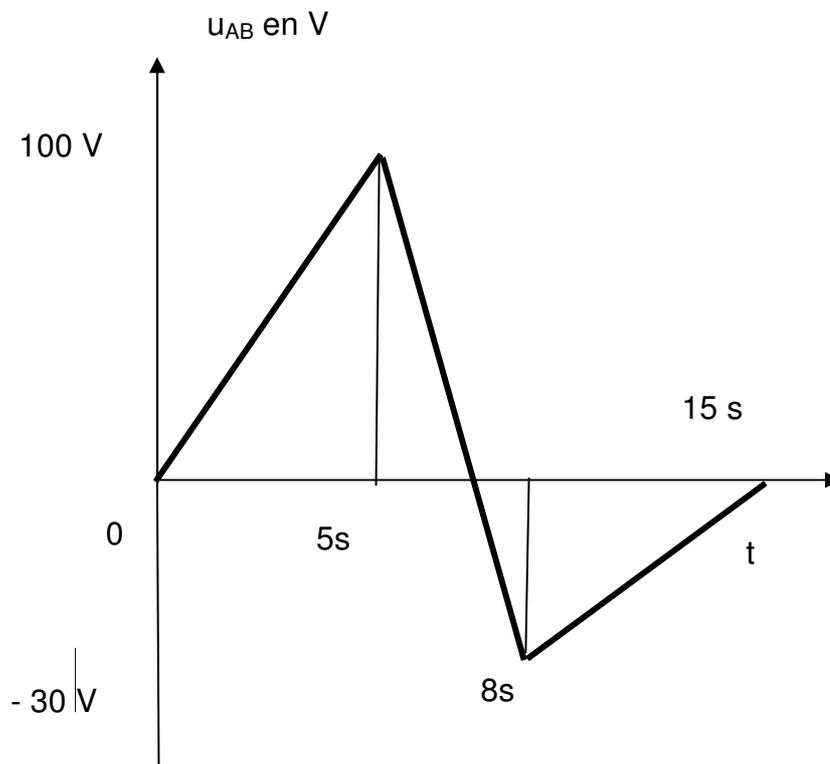
A $t= 0$, $q_A=0$ A $t= 10 \text{ s}$, $u_{AB} = 20 \text{ V}$

Déterminer I

.8.10.3 □ Exercice 3

La tension aux bornes d'un condensateur de capacité $5\mu\text{F}$ varie au cours du temps de la manière suivante :

Etudier la fonction $i=f(t)$ correspondante.



.8.10.4 □ Exercice 4

Calculer la capacité du condensateur équivalent à deux condensateurs de capacités $C_1=5 \mu\text{F}$ et $C_2=15 \mu\text{F}$ montés en série

.8.10.5 □ Exercice 5

On constitue des ensembles comportant q condensateurs identiques en série, chaque condensateur ayant pour capacité C . On réalise le montage en parallèle de p ensembles.

Exprimer la capacité du condensateur équivalent à ce groupement mixte en fonction de C

.8.10.6 □ Exercice 6

Un condensateur dont les extrémités sont A_1 et B_1 , de capacité $C_1=5 \mu\text{F}$, est chargé sous une tension $U_{A_1B_1}= 100 \text{ V}$. Un condensateur dont les extrémités sont A_2 et B_2 , de capacité $C_2=3 \mu\text{F}$, est chargé sous une tension $U_{A_2B_2}= 70 \text{ V}$.

On relie A_1 et A_2 par un fil conducteur, ainsi que B_1 et B_2 .

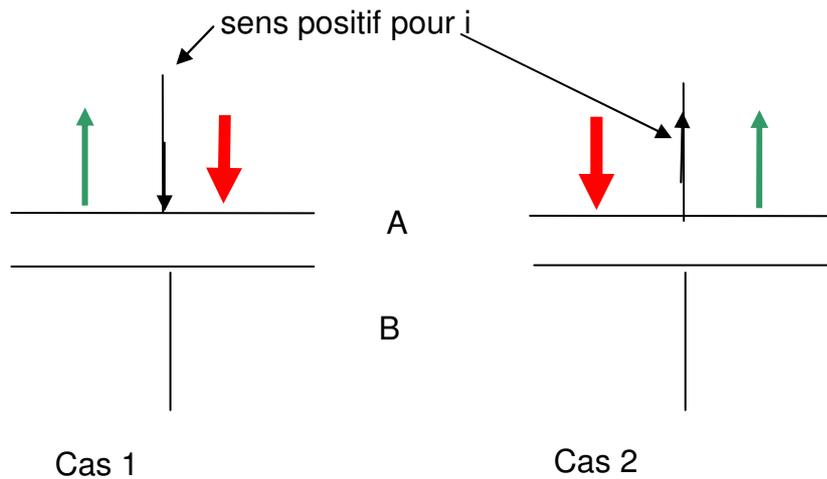
Quelle est la valeur de la tension commune U_{AB} aux bornes des deux condensateurs ?

Comparer l'énergie électrostatique emmagasinée par le système formé par les deux condensateurs avant et après les liaisons. Conclure.

.8.11 CORRIGES DES EXERCICES

□ Exercice 1

q_A est une charge positive qui diminue ; on en déduit que les électrons circulent dans le circuit dans le sens de la flèche rouge . Le sens de circulation du courant est le sens inverse, il est représenté en vert.



On en déduit que dans le premier cas, l'intensité est négative et que dans le deuxième cas, elle est positive.

$$\text{Cas 1 : } i = \frac{dq_A}{dt} \quad q_A \searrow \quad q \text{ d}t \nearrow \Rightarrow i < 0 \quad i = -\frac{10^{-4} - 10^{-5}}{10} = -9 \times 10^{-6} \text{ A}$$

$$\text{Cas 2 } i = -\frac{dq_A}{dt} \quad q_A \searrow \quad q \text{ d}t \nearrow \Rightarrow i > 0 \quad i = +9 \times 10^{-6} \text{ A}$$

□ Exercice 2

$$q = Cu \quad It = Cu \quad I = \frac{Cu}{t} \quad I = \frac{5 \times 10^{-6} \times 20}{10} = 10^{-5} \text{ A}$$

□ Exercice 3

$$i = C \frac{du}{dt}$$

$$\text{pour } 0 \leq t < 5 \text{ s} \quad \frac{du}{dt} = \frac{100}{5} = 20 \quad i = 5 \times 10^{-6} \times 20 = 10^{-4} \text{ A}$$

$$\text{pour } 5 < t < 8 \text{ s} \quad \frac{du}{dt} = -\frac{(100 - (-30))}{3} = -43,3 \quad i = -5 \times 10^{-6} \times 43,3 = -217 \times 10^{-6} \text{ A}$$

$$\text{pour } 8 < t < 15 \text{ s} \quad \frac{du}{dt} = \frac{(0 - (-30))}{7} = 4,28 \quad i = 5 \times 10^{-6} \times 4,28 = 21,4 \times 10^{-6} \text{ A}$$

□ Exercice 4

$$C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad C_{\text{eq}} = \frac{5 \times 10}{5 + 10} = 3,3 \mu\text{F}$$

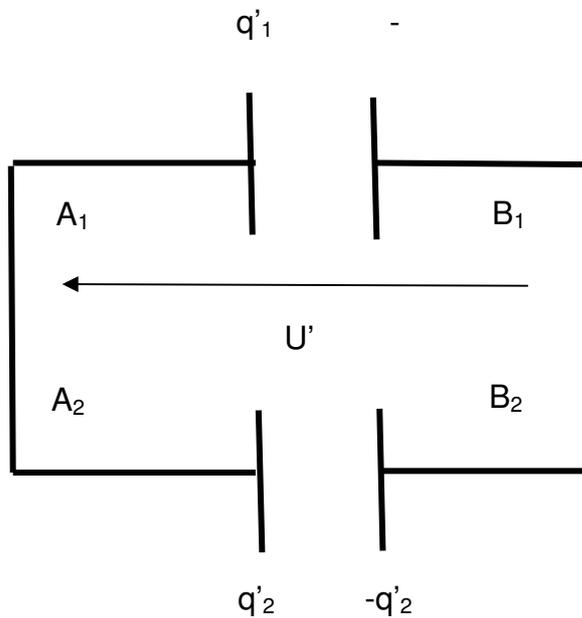
□ Exercice 5

Une Association en série a pour capacité $C_{\text{série}}$

$$\frac{1}{C_{\text{série}}} = p \frac{1}{C} \Rightarrow C_{\text{série}} = \frac{C}{P}$$

Association mixte: $C_{\text{eq}} = q C_{\text{série}}$ $C_{\text{eq}} = q \frac{C}{p}$

Exercice 6



Charge initiale du condensateur 1 : $q_1 = C_1 U_1 = 5 \times 10^{-6} \times 100 = 5 \times 10^{-4} \text{ C}$

Charge initiale du condensateur 2 : $q_2 = C_2 U_2 = 3 \times 10^{-6} \times 70 = 2,1 \times 10^{-4} \text{ C}$

Quantité d'électricité portée par les armatures positives des deux condensateurs avant la liaison

$$Q = q_1 + q_2 = 7,1 \times 10^{-4} \text{ C}$$

Quantité d'électricité portée par les armatures positives des deux condensateurs après la liaison

$$Q' = (C_1 + C_2) U'$$

D'après la conservation de l'électricité :

$$Q = Q' \quad U' = \frac{7,1 \times 10^{-4}}{8 \times 10^{-6}} = 88,75 \text{ V}$$

Energie électrostatique du système formé par les deux condensateurs avant la liaison :

$$E = \frac{1}{2} C_1 U_1^2 + \frac{1}{2} C_2 U_2^2$$

$$E = 0,5 \times 5 \times 10^{-6} \times 100^2 + 0,5 \times 3 \times 10^{-6} \times 70^2 = 32,35 \times 10^{-3} \text{ J}$$

Energie électrostatique du système formé par les deux condensateurs après la liaison :

$$E' = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U'^2 \quad E' = 0,5 \times 8 \times 10^{-6} \times 88,75^2 = 31,5 \times 10^{-3} \text{ J}$$

$E' < E$: il y a émission d'énergie rayonnante lors de la liaison.

.CHAPITRE 9 LES BOBINES

.9.1 CONSTITUTION.

Une bobine est constituée d'un fil en cuivre recouvert d'une fine couche de vernis isolant enroulé de manière à former un grand nombre de spires.

La bobine peut comporter un noyau de fer doux qui accroît ses propriétés magnétiques.

.9.2 REPRESENTATION SYMBOLIQUE.

Les schémas normalisés d'une bobine sont :

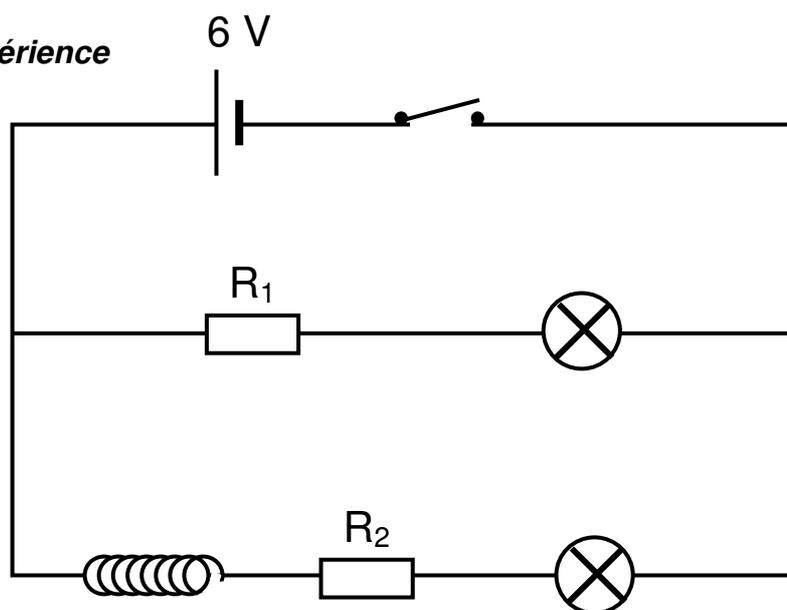


.9.3 ACTIVITES : UNE BOBINE PEUT-ELLE SE COMPORTER COMME UNE RESISTANCE ?

Il est possible effectivement de mesurer à l'ohmmètre la résistance de la bobine.

.9.3.1 Activité 1

.9.3.1.1 Expérience



L_1 et L_2 sont deux lampes à incandescence identiques

On ajuste les valeurs de R_1 et de R_2 pour que les deux branches en dérivation aient même résistance.

Lorsque l'on ferme l'interrupteur, les deux lampes s'allument mais L_2 s'allume avec retard par rapport à L_1 .

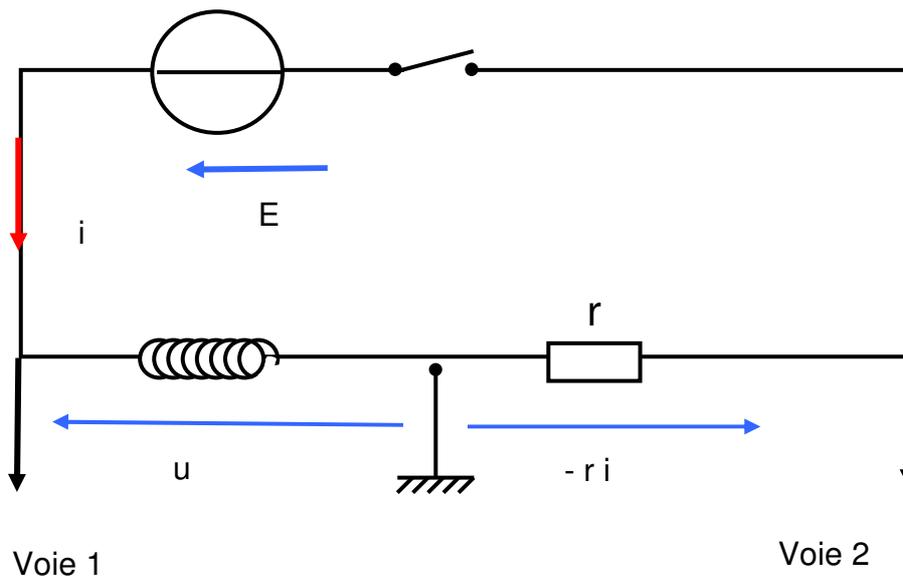
.9.3.1.2 Interprétation

Comme les deux branches en dérivation ont même résistance, on en déduit que la bobine est la cause de ce retard.

On en déduit que le comportement de la bobine est différent de celui d'un simple conducteur ohmique

.9.3.2 Activité 2

.9.3.2.1 Expérience



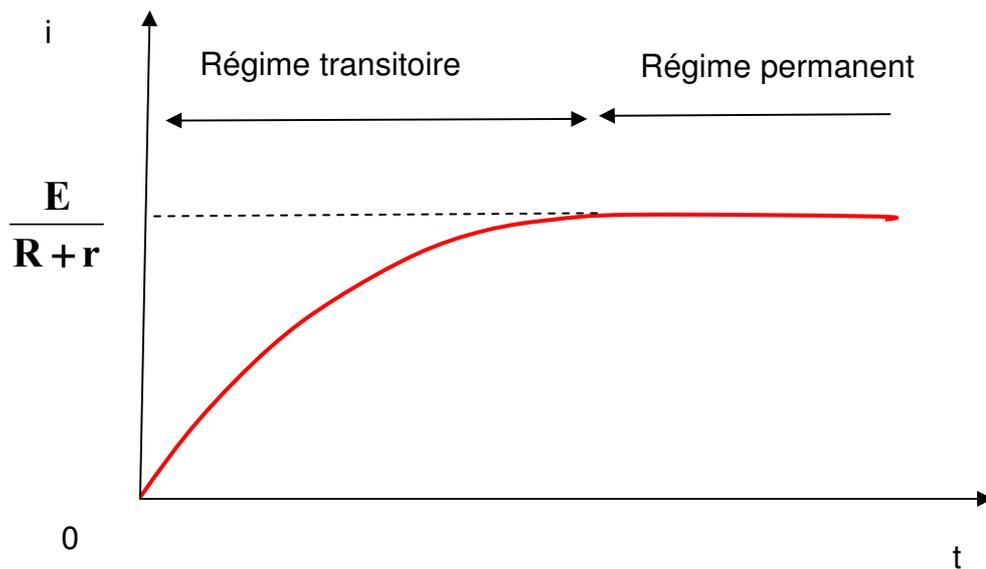
On utilise un oscilloscope à mémoire ou une carte d'acquisition de mesures reliée à un ordinateur. Ces deux appareils permettent d'étudier des phénomènes variant rapidement au cours du temps. Dans les deux cas, le nombre de mesures effectuées par seconde est important.

Le schéma montre que l'on peut mesurer et étudier l'évolution, au cours du temps, de u , tension aux bornes de la bobine et de $-ri$, tension aux bornes de la résistance r placée en série avec la bobine.

La résistance r a été introduite en série avec la bobine parce que la tension entre ses bornes est proportionnelle à i et permet donc de déterminer les valeurs de i et d'étudier l'évolution de i au cours du temps.

Dans les deux cas, on peut obtenir la courbe représentative de $i = f(t)$.

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur



.9.3.2.2 Interprétation :

La courbe montre que l'intensité du courant croît puis se stabilise. La première phase, d'une durée d'une fraction de seconde à quelques secondes est transitoire. Au cours de cette phase, intensité et tensions varient.

Au cours de la seconde phase, ces grandeurs ne varient plus.

On constate que la valeur maximale de l'intensité (en toute rigueur valeur de i correspondant à l'asymptote) est égale à $\frac{E}{R+r}$

Si nous n'avions pas utilisé la résistance r , nous aurions eu $\frac{E}{R}$, valeur de l'intensité parcourant une résistance R , soumise à une tension E

R est égale à la résistance mesurée entre les bornes de la bobine à l'ohmmètre.

En régime permanent, la bobine se comporte comme un conducteur ohmique de même résistance.

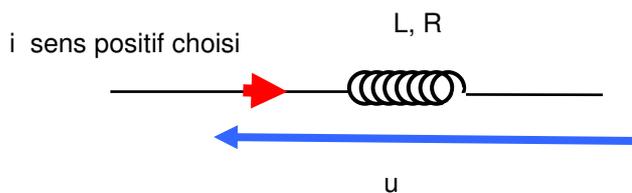
Pendant le régime transitoire, la bobine ne se comporte pas comme une simple résistance.

A l'aide d'un logiciel de traitement de mesures, on peut déterminer les équations des courbes tracées. On pourrait ainsi montrer que $i = f(t)$ est égale à

$$i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R+R'}{L}t} \right)$$

L est une constante dépendant de la bobine : c'est son inductance

.9.4 GRANDEURS CARACTERISTIQUES D'UNE BOBINE.



Une bobine est caractérisée par sa résistance R et son inductance L.

R en Ω L en henry (H).

L'inductance dépend du nombre de spires de la bobine et de ses caractéristiques géométriques.

Si la bobine ne présente pas de noyau de fer doux, L est une constante.

Une bobine serait parfaite si R était nulle.

.9.5 RELATION ENTRE INTENSITE ET TENSION.

Le logiciel permet aussi d'établir l'expression de la tension u aux bornes de la bobine en fonction de l'intensité i du courant qui la traverse. Si u et i sont fléchées en sens inverse

$$u = Ri + L \frac{di}{dt}$$

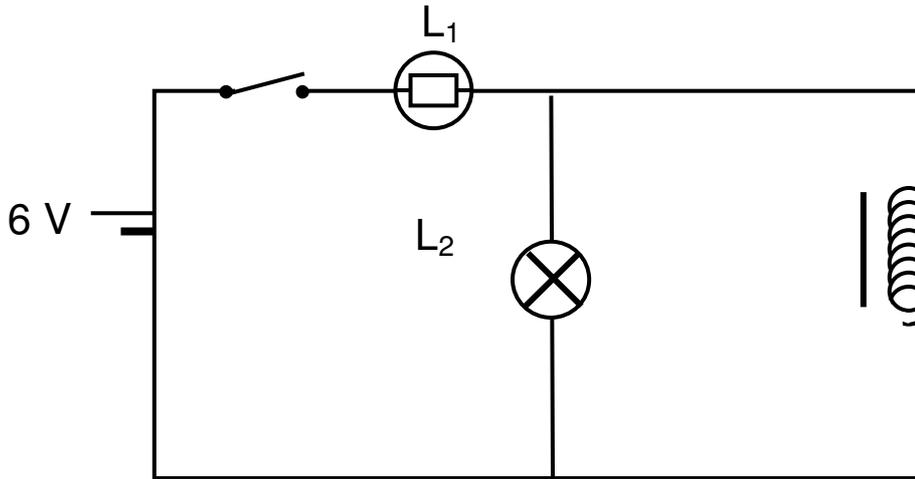
u en V $\frac{di}{dt}$ en $A.s^{-1}$ R en Ω L en H

□ exercice 1

.9.6 ENERGIE EMMAGASINEE PAR UNE BOBINE.

.9.6.1 Mise en évidence expérimentale

.9.6.1.1 Expérience



Pour augmenter l'inductance L et mieux mettre en évidence les propriétés de la bobine, on place à l'intérieur de celle-ci un noyau de fer doux.

Le circuit comprend une lampe à incandescence L_1 fonctionnant sous une tension nominale de 3,5 V et une lampe au néon L_2 qui ne s'allume que si la tension appliquée entre ses bornes dépasse 60 V.

On ferme l'interrupteur ; la lampe L_1 brille instantanément. La lampe L_2 reste éteinte.

Lorsqu'on ouvre ensuite l'interrupteur, la lampe L_1 s'éteint et L_2 émet un bref éclair.

.9.6.1.2 Interprétation

Lorsque l'on ferme l'interrupteur, la bobine, parcourue par un courant, emmagasine de l'énergie. A l'ouverture, la bobine restitue cette énergie ce qui explique que la lampe L_2 émette de la lumière

.9.6.2 Expression de l'énergie emmagasinée

Entre t et $t+dt$, on peut considérer i constant et écrire que l'énergie reçue par la bobine est égale à $u i dt$ c'est-à-dire $L \frac{di}{dt} i dt$ soit $L i di$

L'énergie emmagasinée par une bobine lorsque la valeur de l'intensité du courant qui la traverse passe de 0 à I est :

$$E = \int_0^I L i di = \left[\frac{1}{2} L i^2 \right]_0^I = \frac{1}{2} L I^2 \quad E = \frac{1}{2} L I^2$$

E en J I en A L en H

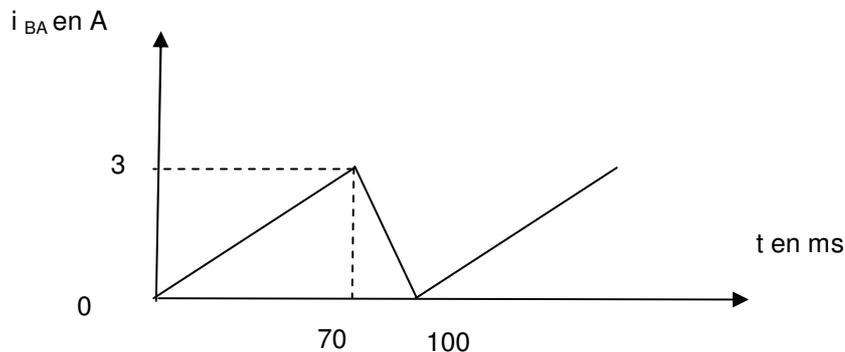
Remarque : on dit qu'une bobine emmagasine de l'énergie ; on ne parle pas de charge.

□ exercice 7

.9.7 EXERCICES

□ Exercice 1

Une bobine d'inductance $L = 0,5$ H et de résistance négligeable est parcourue par un courant circulant de B vers A dans la bobine et dont l'intensité i_{BA} varie périodiquement au cours du temps.



Donner l'expression de la tension u_{AB} aux bornes de la bobine en fonction du temps.

Représenter l'allure de la courbe observée à l'oscilloscope si la base de temps est réglée à

10 ms.cm^{-1} et si la sensibilité verticale est de 1 V.cm^{-1}

.9.8 CORRIGE DES EXERCICES

.9.8.1 Exercice 1

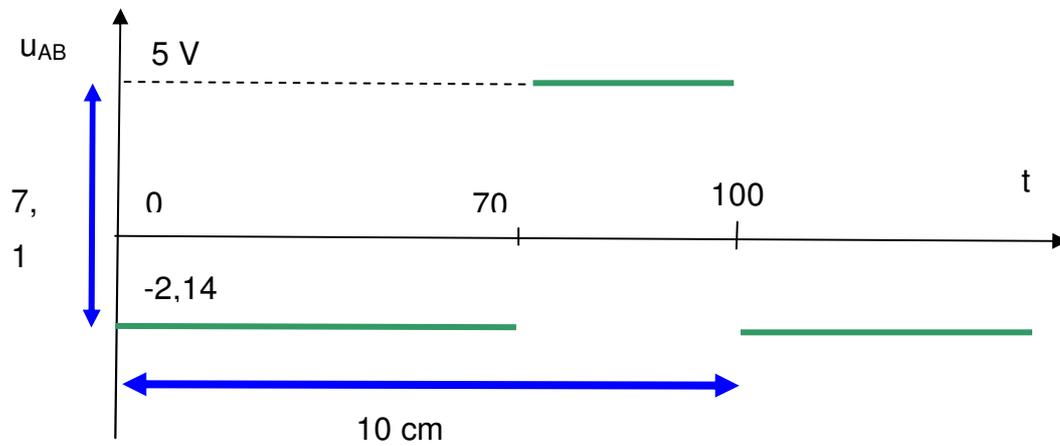
$$\text{pour } 0 \leq t \leq 70 \text{ ms} \quad i = \frac{3}{70 \times 10^{-3}} t \quad \text{pour } 70 \leq t \leq 100 \text{ ms}$$

$$i = -\frac{3}{30 \times 10^{-3}} t + 10$$

$$u_{AB} = -L \frac{di_{BA}}{dt}$$

$$\text{pour } 0 \leq t \leq 70 \text{ ms}$$

$$u_{AB} = -0,05 \times \frac{3}{70 \times 10^{-3}} = -2,14 \text{ V}$$



$$\text{pour } 70 \leq t \leq 100 \text{ ms} \quad u_{AB} = -0,05 \times \left(-\frac{3}{30 \times 10^{-3}}\right) = 5 \text{ V}$$

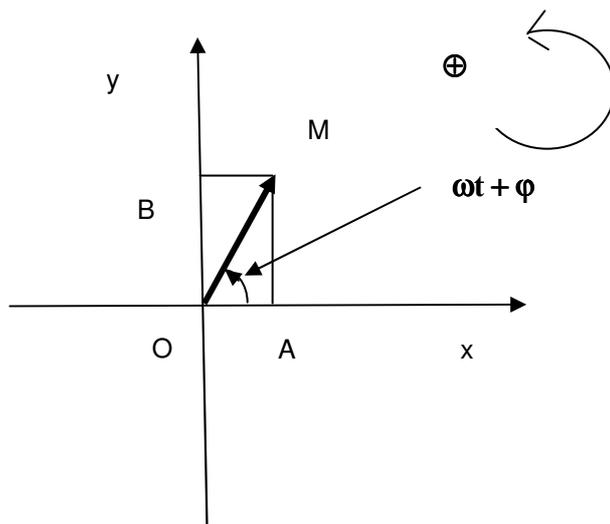
**ETUDE DES CIRCUITS
EN REGIME
SINUSOIDAL**

.CHAPITRE 10 METHODE DE FRESNEL

.10.1 FONCTION SINUSOÏDALE ASSOCIEE A UN VECTEUR TOURNANT.

On considère un vecteur \overline{OM} , d'origine O, tel que $OM=A$, tournant autour de O avec la vitesse angulaire constante Ω dans le sens positif.

Si l'on projette orthogonalement le point M sur les axes Ox et Oy, ces projections sont animées de mouvements sinusoïdaux de pulsation ω telle que $\omega = \Omega$



$$\overline{OA} = A \cos(\Omega t + \varphi) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad \overline{OB} = A \sin(\Omega t + \varphi) = A \sin(\omega t + \varphi)$$

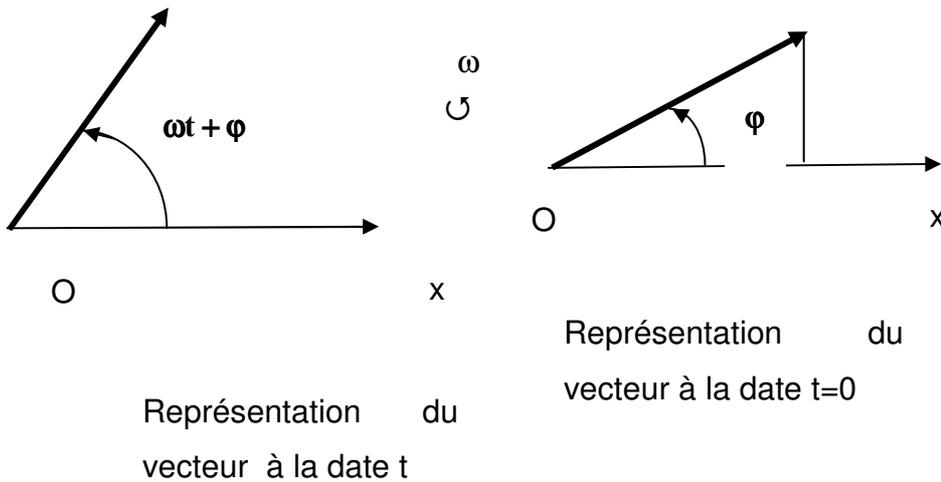
Ainsi à un vecteur tournant à la vitesse angulaire Ω , on peut associer une fonction sinusoïdale de pulsation ω telle que $\omega = \Omega$.

.10.2 ASSOCIATION D'UN VECTEUR TOURNANT A UNE FONCTION SINUSOÏDALE.

On pourra effectuer l'opération inverse de la précédente et faire correspondre un vecteur tournant à une fonction sinusoïdale.

Ainsi à une grandeur sinusoïdale telle qu'une $x = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, on peut associer un vecteur \overline{OM} de norme proportionnelle à X_m tournant à la vitesse angulaire ω autour de O . C'est la méthode de Fresnel.

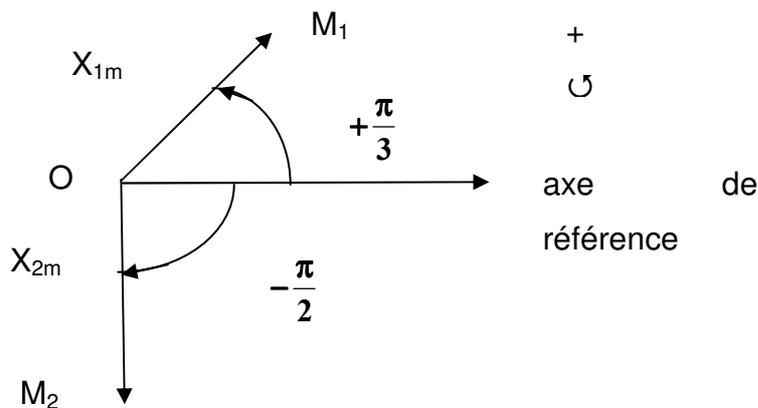
Comme on sait que le vecteur tourne à vitesse angulaire constante au cours du temps, par convention, le vecteur sera représenté à la date $t=0$. Il fait alors avec Ox un angle φ



Représentation de Fresnel

$x_1 = X_{1m} \cos(\omega t + \frac{\pi}{3})$ est représenté par \overline{OM}_1

$x_2 = X_{2m} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ est représenté par \overline{OM}_2



.10.3 DIFFERENCE DE PHASE ENTRE DEUX FONCTIONS SINUSOIDALES DE MEME PERIODE.

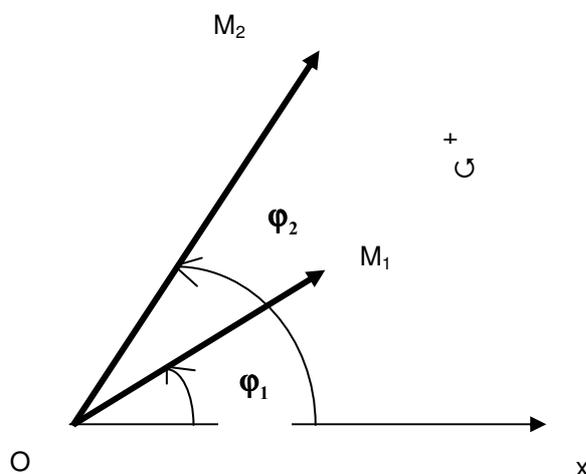
.10.3.1 Déphasage

On considère deux fonctions de même période et ayant par conséquent même ω :

$$x_1 = X_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad x_2 = X_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

Ces fonctions sont déphasées : $\varphi_2 - \varphi_1$ est le déphasage

On représente les deux vecteurs de Fresnel associés à $t = 0$



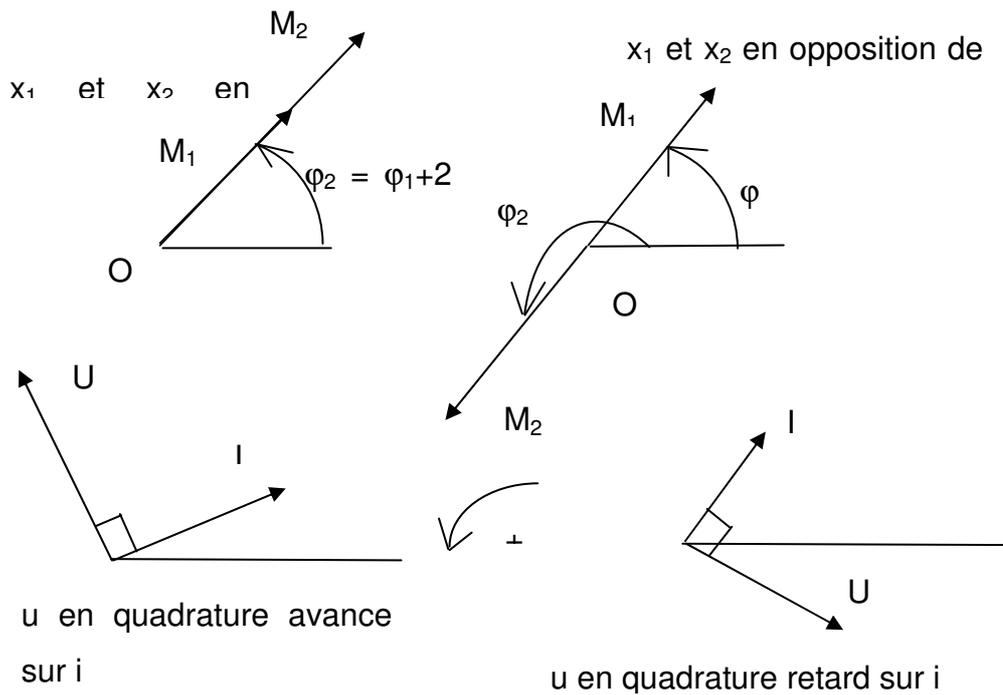
Au cours du temps, les deux vecteurs tournent à la même vitesse angulaire, ainsi que le triangle OM_1M_2 qui est indéformable au cours de la rotation

.10.3.2 Déphasages particuliers.

Si $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, les deux fonctions sont en phase : elles prennent leurs maximum et leurs minimum en même temps et s'annulent en même temps

Si $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, les deux fonctions sont en opposition de phase : l'une passe par la valeur maximale quand l'autre passe par sa valeur minimale mais elles s'annulent en même temps

Si $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi / 2$ avec $k \in \mathbb{Z}$, les deux fonctions sont en quadrature de phase : l'une passe par la valeur maximale ou minimale quand l'autre passe par zéro



.10.4 SOMME DE FONCTIONS SINUSOIDALES DE MEME PERIODE.

.10.4.1 Propriétés de la somme

On considère deux fonctions de même période et ayant par conséquent même ω :

$$x_1 = X_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad x_2 = X_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

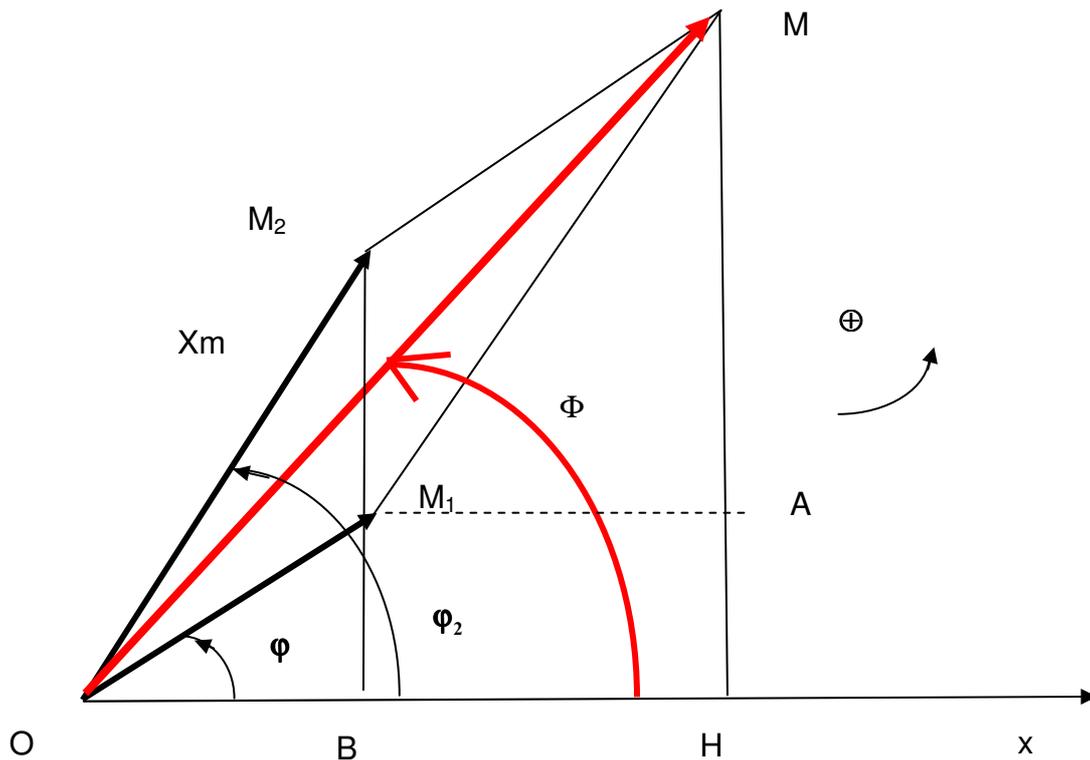
On représente les deux vecteurs de Fresnel associés à $t = 0$

On construit le vecteur \overline{OM} tel que

$$\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 \quad \tan \Phi = \frac{MH}{OH} = \frac{MA + AH}{OB + BH}$$

Le vecteur OM tourne à la même vitesse que les autres autour de O ; le parallélogramme OM_1MM_2 est indéformable. A ce vecteur est associé une fonction sinusoïdale de même période, d'amplitude A et de phase Φ .

En projetant la somme vectorielle sur Ox , on obtient $x = x_1 + x_2$



Conclusion :

La somme de deux fonctions sinusoïdales de même période est une fonction sinusoïdale de même période.

$$x = x_1 + x_2 = X_m \cos(\omega t + \Phi).$$

Détermination de X_m et de Φ .

Première méthode :

$$X_m \cos(\omega t + \Phi) = X_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1) + X_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$$

On développe le membre de gauche:

$$X_m \cos\omega t \cos\Phi - X_m \sin\omega t \sin\Phi$$

On développe le membre de droite

$$X_{1m} \cos\omega t \cos\varphi_1 - X_{1m} \sin\omega t \sin\varphi_1 + X_{2m} \cos\omega t \cos\varphi_2 - X_{2m} \sin\omega t \sin\varphi_2$$

$$= \cos\omega t (X_{1m} \cos\varphi_1 + X_{2m} \cos\varphi_2) - \sin\omega t (X_{1m} \sin\varphi_1 + X_{2m} \sin\varphi_2)$$

La relation initiale est de la forme:

$$X_m \cos\omega t \cos\Phi - X_m \sin\omega t \sin\Phi = A \cos\omega t - B \sin\omega t$$

Cette relation doit être vérifiée quel que soit t.

Deux conditions doivent être vérifiées :

$$X_m \cos\omega t \cos\Phi = A \cos\omega t \quad \text{donc } X_m \cos\Phi = A$$

$$\text{soit } X_m \cos\Phi = X_{1m} \cos\varphi_1 + X_{2m} \cos\varphi_2$$

$$(2) X_m \sin \omega t \sin \Phi = B \sin \omega t \quad \text{donc } X_m \sin \Phi = B$$

$$\text{soit } X_m \sin \Phi = X_{1m} \sin \varphi_1 + X_{2m} \sin \varphi_2$$

En divisant membre à membre (2) par (1) on obtient:

$$\tan \Phi = \frac{X_{1m} \sin \varphi_1 + X_{2m} \sin \varphi_2}{X_{1m} \cos \varphi_1 + X_{2m} \cos \varphi_2}$$

En élevant (1) et (2) au carré, on obtient

$$(X_m \cos \Phi)^2 = (X_{1m} \cos \varphi_1 + X_{2m} \cos \varphi_2)^2$$

$$(X_m \sin \Phi)^2 = (X_{1m} \sin \varphi_1 + X_{2m} \sin \varphi_2)^2$$

En additionnant membre à membre ces deux dernières relations, en factorisant et en utilisant la relation trigonométrique « $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ », on aboutit à :

$$X_m^2 = X_{1m}^2 + X_{2m}^2 + 2X_{1m}X_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Deuxième méthode

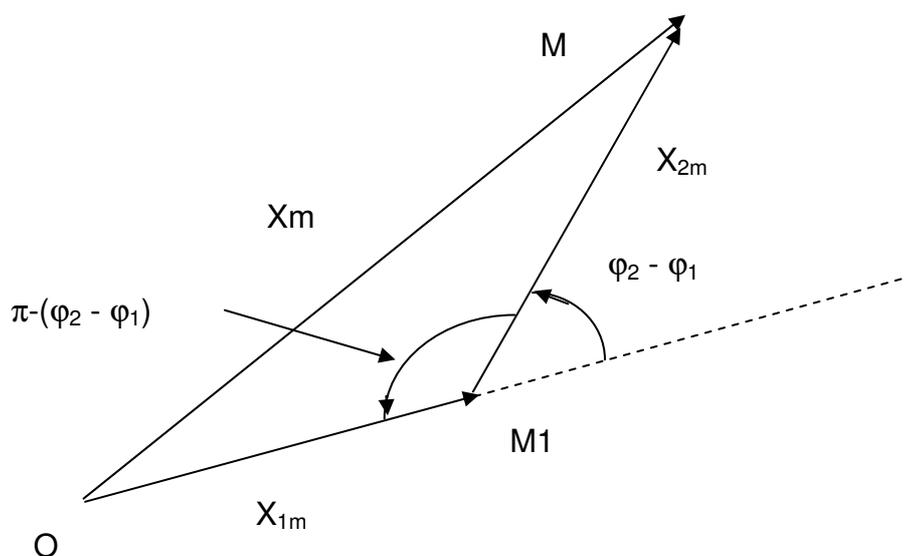
Dans le triangle rectangle OMH, on exprime $\tan \Phi$

$$\tan \Phi = \frac{MH}{OH} = \frac{MA + AH}{OB + BH}$$

$$\tan \Phi = \frac{X_{1m} \sin \varphi_1 + X_{2m} \sin \varphi_2}{X_{1m} \cos \varphi_1 + X_{2m} \cos \varphi_2}$$

Dans le triangle quelconque OM₁M on peut calculer X_m par application du théorème d'Al Kaschi.

$$X_m^2 = X_{1m}^2 + X_{2m}^2 + 2X_{1m}X_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$



$$X_m^2 = X_{1m}^2 + X_{2m}^2 - 2 X_{1m} X_{2m} \cos(\pi - (\varphi_2 - \varphi_1))$$

$$X_m^2 = X_{1m}^2 + X_{2m}^2 + 2 X_{1m} X_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Résultats.

$$\tan \Phi = \frac{X_{1m} \sin \varphi_1 + X_{2m} \sin \varphi_2}{X_{1m} \cos \varphi_1 + X_{2m} \cos \varphi_2}$$

$$X_m^2 = X_{1m}^2 + X_{2m}^2 + 2 X_{1m} X_{2m} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Remarque :

On utilise la construction de Fresnel dans des cas relativement simples où les constructions ne font pas intervenir trop de triangles quelconques.

Si le nombre de dipôles est important, et si les figures risquent d'être compliquées, il faut faire une résolution à l'aide des nombres complexes.

(chapitre suivant)

.10.5 EXERCICES

□ Exercice 1

$$u_1 = 5 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{6}) \quad u_2 = 5 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$$

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{Etablir l'expression de } u = f(t)$$

à l'aide de la construction de Fresnel

par le calcul

□ Exercice 2

$$u_1 = 5 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{6}) \quad u_2 = 5 \cos(100\pi t + \frac{\pi}{3})$$

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{Etablir l'expression de } u = f(t) \text{ à l'aide de la construction de}$$

Fresnel

□ Exercice 3

$$u_2 = 8 \cos(100\pi t + \frac{2\pi}{3}) \quad u_1 = 2 \cos(100\pi t + \frac{\pi}{6})$$

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{Etablir l'expression de } u = f(t) \text{ à l'aide de la construction de}$$

Fresnel

.10.6 CORRIGES DES EXERCICES

.10.6.1 Corrigé de l'exercice 1

.10.6.1.1 Résolution par le calcul

$$u_1 = 5 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{6}) \quad u_2 = 5 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$$

$$u = u_1 + u_2$$

$$U_m \sin(100\pi t + \varphi) = 5 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{6}) + 5 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{3})$$

$$u = U_m(\sin 100\pi t \cos \varphi + \cos 100\pi t \sin \varphi)$$

$$u = \sin 100\pi t(U_m \cos \varphi) + \cos 100\pi t(U_m \sin \varphi)$$

$$u_1 + u_2 = 5(\sin 100\pi t \cos \frac{\pi}{6} + \cos 100\pi t \sin \frac{\pi}{6} + \sin 100\pi t \cos \frac{\pi}{3} + \cos 100\pi t \sin \frac{\pi}{3})$$

$$u_1 + u_2 = 5((\sin 100\pi t) \frac{\sqrt{3}}{2} + (\cos 100\pi t) \frac{1}{2} + (\sin 100\pi t) \frac{1}{2} + (\cos 100\pi t) \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$u_1 + u_2 = 5(\sin 100\pi t)(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) + 5(\cos 100\pi t)(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})$$

Pour que $u = u_1 + u_2$ soit vérifiée quel que soit t , il faut que :

$$\sin 100\pi t(U_m \cos \varphi) = 5(\sin 100\pi t)(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) \quad \text{donc } U_m \cos \varphi = 5(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})$$

$$\cos 100\pi t(U_m \sin \varphi) = 5(\cos 100\pi t)(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) \quad \text{donc } U_m \sin \varphi = 5(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})$$

$$\frac{U_m \sin \varphi}{U_m \cos \varphi} = \tan \varphi = \frac{5(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})}{5(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})} = 1 \quad \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$U_m \cos \varphi = 5(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) \Rightarrow U_m \cos \frac{\pi}{4} = 5(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}) \quad \text{d'où}$$

$$U_m = \frac{5(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{5(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 9,66$$

$u = 9,66 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{4})$ Si l'on préfère présenter le résultat sous forme de

cosinus, on écrira :

$$u = 9,66 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{4}) = 9,66 \cos(\frac{\pi}{2} - 100\pi t - \frac{\pi}{4}) = 9,66 \cos(-\frac{\pi}{2} + 100\pi t + \frac{\pi}{4})$$

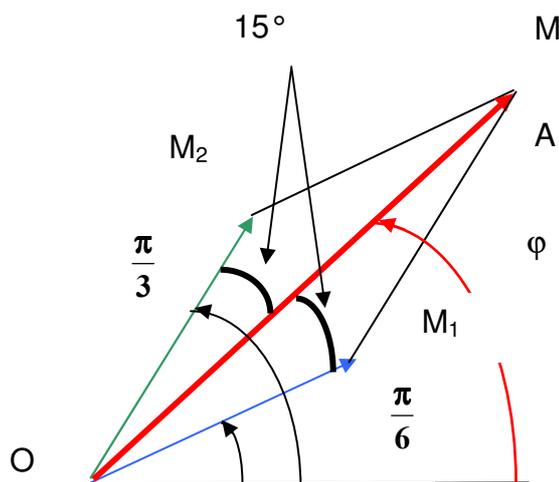
$$u = 9,66 \cos(100\pi t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) = 9,66 \cos(100\pi t - \frac{\pi}{4})$$

$$\text{soit } u = 9,66 \cos(100\pi t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) = 9,66 \cos(100\pi t - \frac{\pi}{4})$$

.10.6.1.2 Résolution par la construction de Fresnel

Les deux fonctions sont en sinus ; cela n'a pas d'importance car les deux vecteurs de Fresnel tournent dans le même sens, à la même vitesse et sont représentés au même instant

..



M

A

φ

L'angle M_1OM_2 vaut 30°

OM est bissectrice de cet angle

Dans le triangle OM_2M :

$$A = 2 \times 5 \cos 15^\circ = 9,66$$

$$\varphi = 30 + 15 = 45^\circ$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

.10.6.2 Corrigé de l'exercice 2

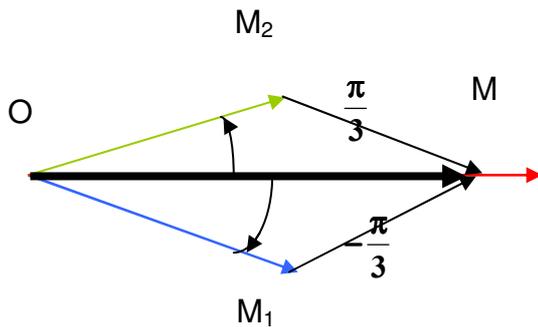
Il faut travailler soit en sinus soit en cosinus. $u_1 = 5 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})$

$u_1 = 5 \cos(\frac{\pi}{2} - 100\pi t - \frac{\pi}{6})$ expression non acceptable car le vecteur de

Fresnel tournerait dans l'autre sens

$$u_1 = 5 \cos(100\pi t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = 5 \cos(100\pi t - \frac{\pi}{3})$$

$$u_2 = 5 \cos(100\pi t + \frac{\pi}{3})$$



OM_2MM_1 est un losange

$$A = 2 \times 5 \cos 30^\circ = 8,66$$

$$\varphi = 0$$

.10.6.3 Corrigé de l'exercice 3

$$u_1 = 2 \cos(100\pi t + \frac{\pi}{6})$$

$u_2 = 6 \cos(100\pi t + \frac{2\pi}{3})$ les deux vecteurs de Fresnel associés sont perpendiculaires.

$$A^2 = 2^2 + 6^2$$

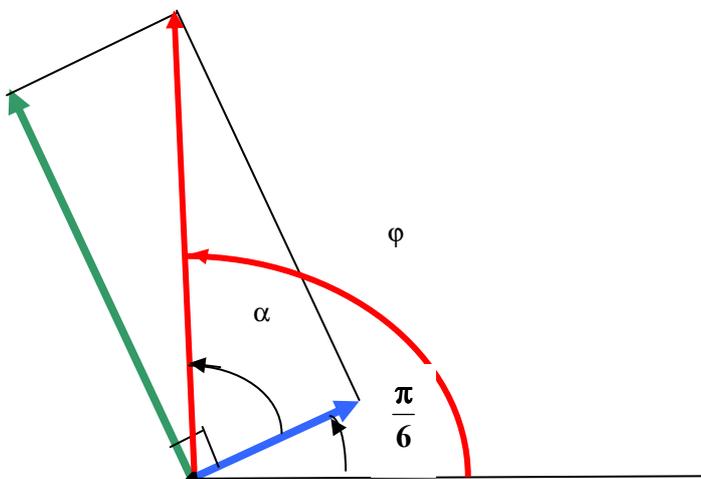
$$A = 6,32$$

$$\tan \alpha = \frac{6}{2} = 3$$

$$\alpha = 1,25 \text{ rad}$$

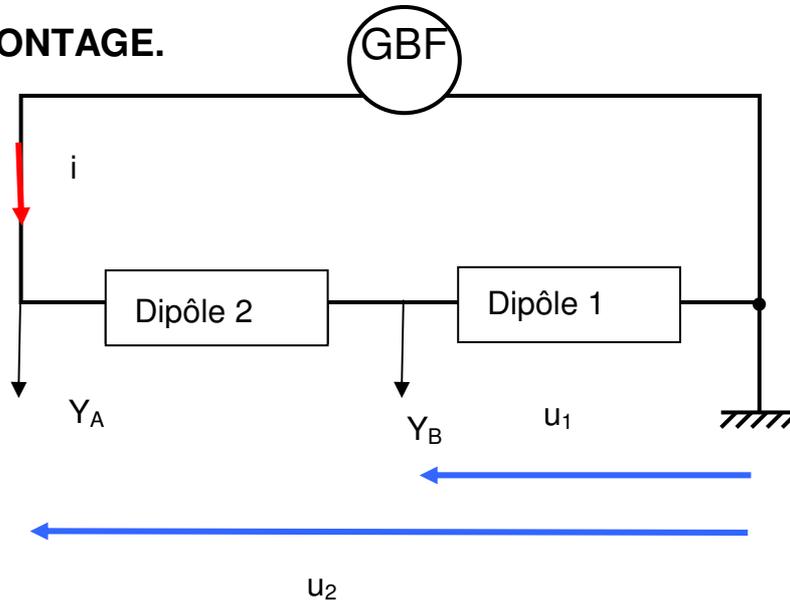
$$\varphi = \frac{\pi}{6} + 1,25 = 1,77 \text{ rad}$$

$$u = 6,32 \cos(100\pi t + 1,77)$$



.CHAPITRE 11 ACTIVITES : ETUDE DE TENSIONS SINUSOIDALES A L'OSCILLOSCOPE

.11.1 MONTAGE.



Le GBF fournit une tension sinusoïdale.

Sur l'écran apparaissent $u_1 = f(t)$ et $u_2 = f(t)$

u_1 est la valeur instantanée de la tension aux bornes du dipôle 1

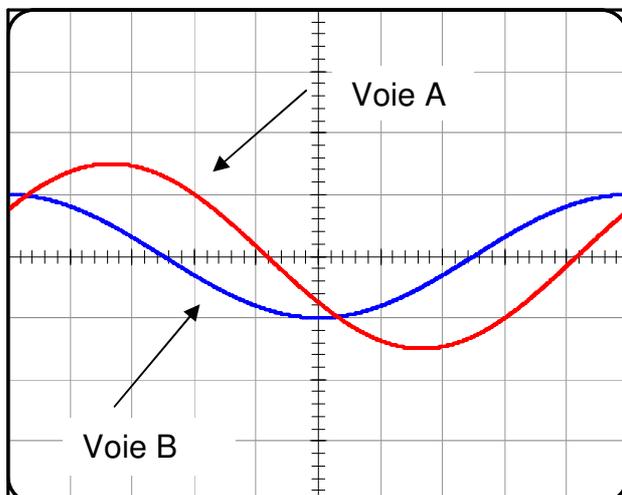
u_2 est la valeur instantanée de la tension aux bornes de l'ensemble des dipôles ou encore tension aux bornes du GBF.

.11.2 OSCILLOGRAMME.

Sensibilité horizontale : 0,5 ms / div

Sensibilité verticale voie A : 2 V / div

Sensibilité verticale voie B : 2 V / div



Questions

1. Déterminer la période des tensions, la fréquence et la pulsation.
2. Quelle est l'amplitude de chaque tension ?
Quelle est la valeur efficace de chaque tension ?
3. En supposant que l'origine des temps soit telle que $u_1 = U_{1m} \cos \omega t$,
déterminer l'expression de $u_2 = U_{2m} \cos(\omega t + \varphi)$
Préciser le sens du déphasage de u_1 par rapport à u_2
Représenter les vecteurs de Fresnel correspondants.
4. La voie B est équipée d'un « amplificateur -1 » ce qui signifie que la tension affichée sur l'écran est celle appliquée entre Y_B et la masse multipliée par -1 . Représenter le nouvel oscillogramme lorsque la touche « $-Y_B$ » est enfoncée.
5. Les sensibilités verticales restent égales à 2 V /div sur les deux voies. La touche « Y_B n'est pas active et on appuie sur la touche « SUM » ; sur l'écran apparaît alors une seule courbe. Que peut-on remarquer ?

.11.3 REPONSES.

1. La période correspond à 10 div

$$T = 10 \times 0,5 = 5 \text{ ms} \quad f = \frac{1}{T} \quad f = \frac{1}{5 \times 10^{-3}} = 200 \text{ Hz}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 200 = 400\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

2. L'oscilloscope nous permet de déterminer les amplitudes des tensions et d'en déduire les valeurs efficaces.

$$U_{1m} = 1 \times 2 = 2 \text{ V} \quad U_1 = \frac{U_{1m}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = 1,41 \text{ V}$$

$$U_{2m} = 1,5 \times 2 = 3 \text{ V} \quad U_2 = \frac{U_{2m}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2,12 \text{ V}$$

- 3.

$$u_1 = U_{1m} \cos \omega t = 2 \cos 400 \pi t \quad u_2 = 3 \cos(400 \pi t + \varphi)$$

la longueur mesurée horizontalement entre les abscisses des sommets des courbes est de 1,7 div.

Le déphasage entre les tensions est donc égal, en valeur absolue à

$$\frac{1,7}{10} 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

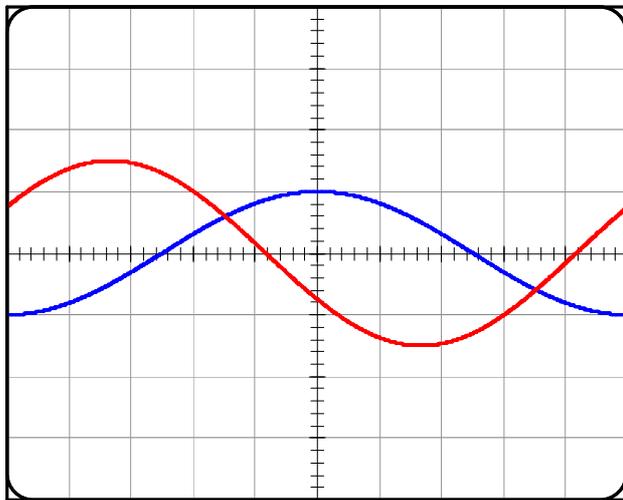
$$-\frac{\pi}{3} = (\vec{U}_1, \vec{U}_2) = \text{déphasage de } u_2 \text{ par rapport à } u_1$$

$$+\frac{\pi}{3} = (\vec{U}_2, \vec{U}_1) = \text{déphasage de } u_1 \text{ par rapport à } u_2$$

La tension u_1 est en avance de $\frac{\pi}{3}$ sur u_2

$$\text{Donc } \varphi = -\frac{\pi}{3} \quad u_2 = 3 \cos(400 \pi t - \frac{\pi}{3})$$

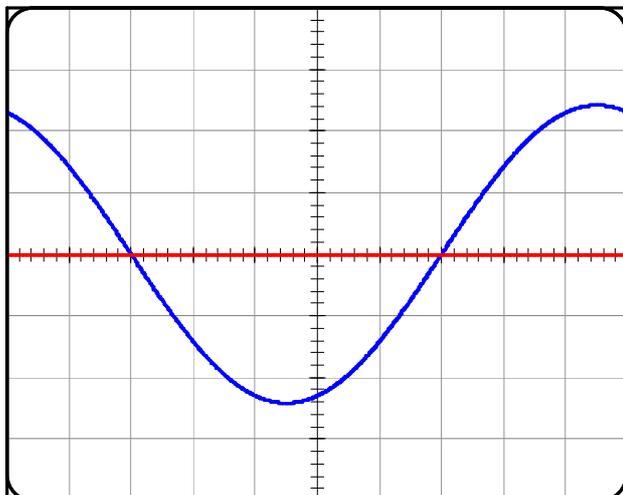
3. Nouvel oscillogramme



4

On obtient une sinusoïde de même période que u_1 et u_2 .

Nous avons ainsi vérifié que la somme de deux tensions sinusoïdales de même période est une tension sinusoïdale de même période.



.CHAPITRE 12 DIPOLES SIMPLES EN REGIME SINUSOIDAL

.12.1 CARACTERISTIQUES D'UNE TENSION SINUSOÏDALE

Si la tension u entre deux points est sinusoïdale, elle est de la forme

$$u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

ω est la pulsation de la tension ; elle s'exprime en rad.s^{-1} .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad T \text{ période en seconde et } f \text{ fréquence en Hz}$$

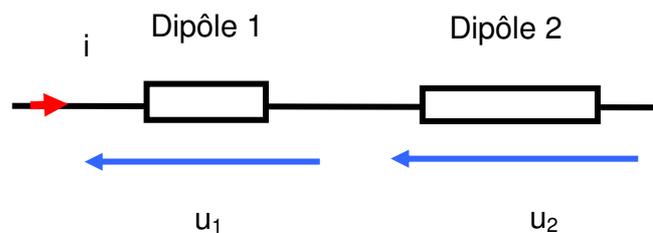
u est la valeur instantanée de la tension

U_m est la valeur maximale de la tension ($-U_m \leq u \leq +U_m$)

$U_m = U\sqrt{2}$ U est la valeur efficace de la tension.

Dans le cas du réseau EDF : $f = 50 \text{ Hz}$ $U = 220 \text{ V}$ $U_m = 311 \text{ V}$

.12.2 DEPHASAGE ENTRE LES TENSIONS AUX BORNES DE DIPOLES DISPOSES EN SERIE



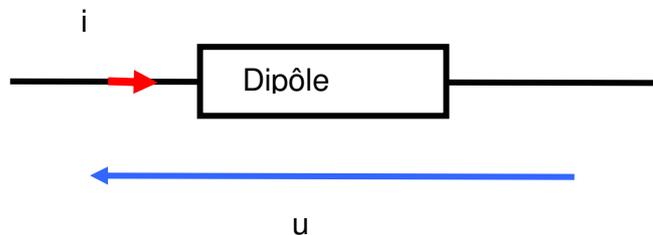
La flèche indique le sens positif choisi pour i

Dans le cas général, u_1 et u_2 sont déphasées

$$u_1 = U_m \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ et } u_2 = U_m \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$\varphi_2 - \varphi_1$ est le déphasage entre u_1 et u_2

.12.3 DEPHASAGE ENTRE LA TENSION AUX BORNES D' UN DIPOLE ET L' INTENSITE DU COURANT QUI LE TRAVERSE

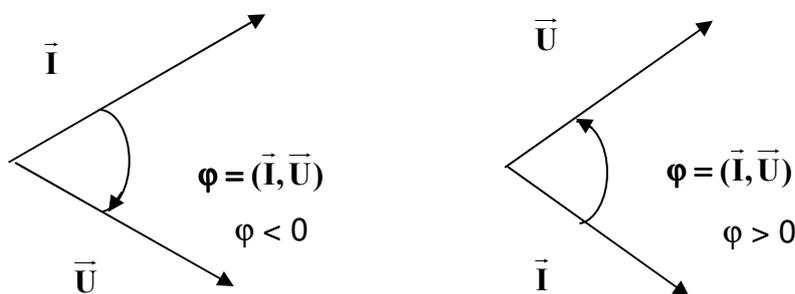


Si $u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ l'intensité du courant est généralement déphasée :
 $i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$

Le déphasage entre u et i est $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ ou $\varphi = \varphi_i - \varphi_u$.

La valeur absolue du déphasage est celle de l'angle formé par les vecteurs de Fresnel associés à i et à u

Le déphasage est une grandeur algébrique et on a fait le choix suivant :



Convention

(\vec{I}, \vec{U}) est l'angle dont il faut tourner le vecteur I pour l'amener sur le vecteur U

$(\vec{I}, \vec{U}) = \varphi_u - \varphi_i =$ déphasage de u par rapport à i

Appelons φ ce déphasage

.12.4 IMPEDANCE ET ADMITTANCE D' UN DIPOLE

.12.4.1 Définition de l'impédance

On considère un dipôle qui, soumis à une tension sinusoïdale est parcouru par un courant sinusoïdal.

Quand on fait varier la valeur maximale de la tension appliquée sans modifier la fréquence imposée, la valeur maximale de l'intensité du courant varie de telle manière que la valeur du quotient $\frac{U_m}{I_m}$ reste

constante.

Pour un dipôle donné, alimenté en régime sinusoïdal de fréquence f donnée, le quotient $\frac{U_m}{I_m}$ est constant : c'est l'impédance Z du dipôle

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U\sqrt{2}}{I\sqrt{2}} = \frac{U}{I} \quad U \text{ en V} \quad I \text{ en A} \quad Z \text{ en } \Omega$$

L'impédance d'un dipôle est, par définition, le quotient de la valeur efficace de la tension appliquée aux bornes du dipôle par l'intensité efficace du courant qui le traverse.

Remarque.

Si U_m est constant et si on fait varier la fréquence le rapport va généralement changer. L'impédance d'un dipôle dépend de la constitution du dipôle mais aussi généralement de la fréquence de travail.

.12.4.2 Définition de l'admittance

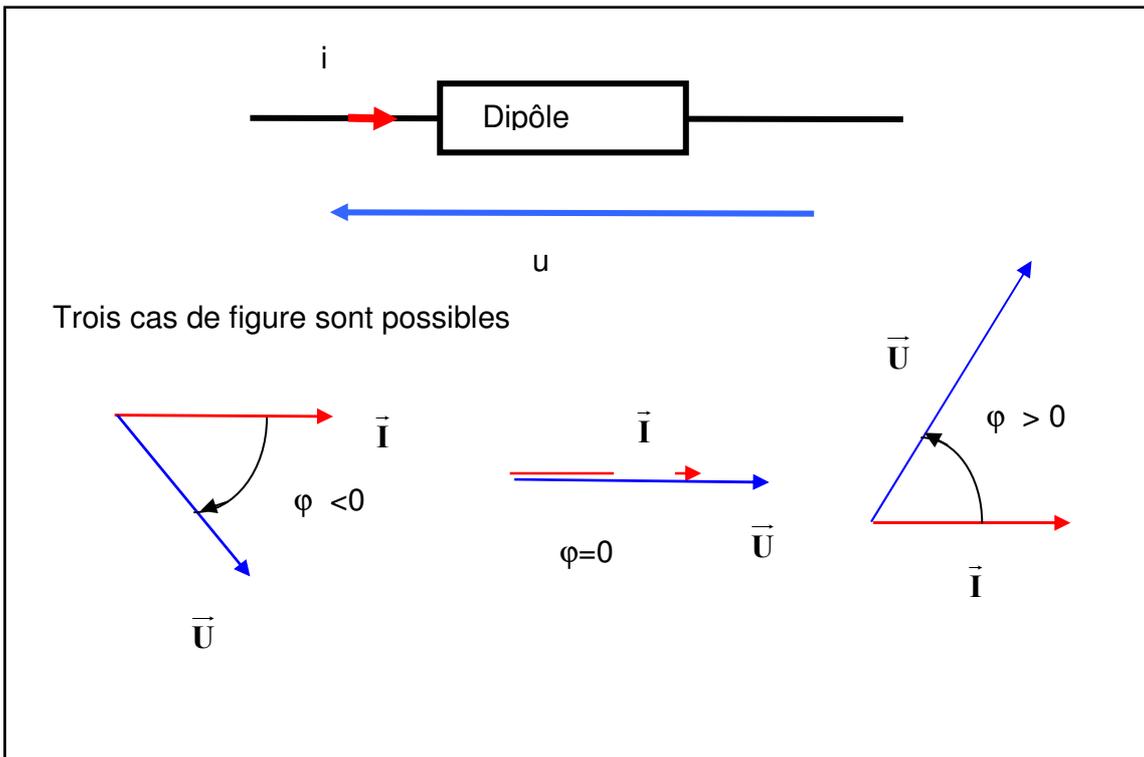
C'est l'inverse de l'impédance : $Y = \frac{1}{Z}$ Z en Ω , Y en S (siemens)

.12.5 ETUDE DE DIPOLES ELEMENTAIRES EN REGIME SINUSOIDAL

Conventions

Dans cette étude la tension appliquée au dipôle sera
 $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

L'intensité du courant qui traversera le dipôle sera $i = I_m \cos \omega t$



.12.5.1 Cas d'une résistance

La loi $u=Ri$ s'applique aux valeurs instantanées : $U_m \cos(\omega t + \varphi) = R I_m \cos \omega t$

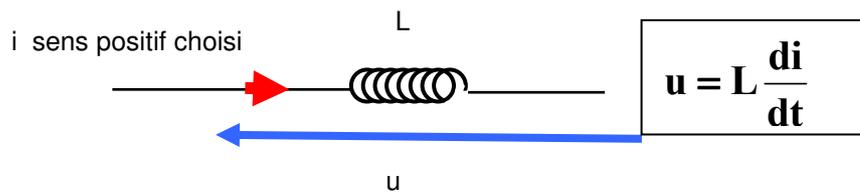
Pour que cette relation soit vérifiée quel que soit t, il faut que $U_m = R I_m$ et $\varphi = 0$

$$\text{Donc } Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{R I_m}{I_m} = R \quad \text{et } \varphi = 0$$

u et i sont en phase ; les vecteurs de Fresnel associés ont même direction, même sens.



.12.5.2 Cas d'une bobine parfaite :



A chaque instant on peut écrire

$$u = L \frac{di}{dt} \quad U_m \cos(\omega t + \varphi) = L \frac{d(I_m \cos \omega t)}{dt}$$

$$U_m \cos(\omega t + \varphi) = -L I_m \omega \sin \omega t = L \omega I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

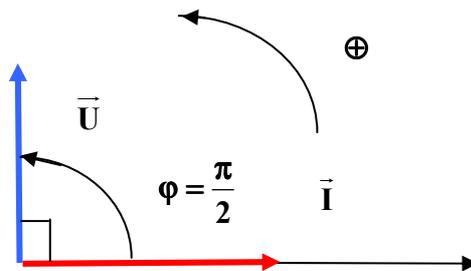
$$U_m \cos(\omega t + \varphi) = L \omega I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Pour que cette relation soit vérifiée quel que soit t, il faut $U_m = L \omega I_m$ et

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{On en déduit } Z : Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{L \omega I_m}{I_m} = L \omega$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ la tension aux bornes d'une bobine parfaite est en quadrature avance sur l'intensité



Remarque :

Une bobine parfaite peut être simulée par un montage électronique comportant un amplificateur opérationnel ou en annulant la résistance d'une bobine réelle à l'aide d'une « résistance négative »

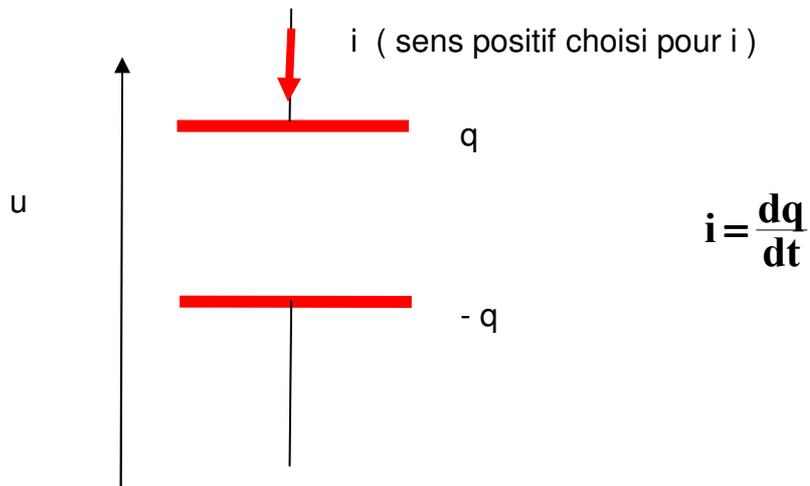
.12.5.3 Cas d'un condensateur parfait.

A chaque instant on peut écrire : $q = C u$ et $i = \frac{dq}{dt}$

$$q = Cu \Rightarrow \frac{dq}{dt} = C \frac{du}{dt} \Rightarrow i = C \frac{du}{dt}$$

$$Im \cos \omega t = C \frac{d(Um \cos(\omega t + \varphi))}{dt} \quad Im \cos \omega t = -C\omega Um \sin(\omega t + \varphi)$$

$$-Im \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = -C\omega Um \sin(\omega t + \varphi)$$

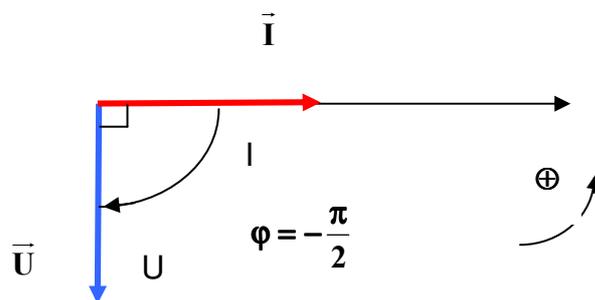


Pour que cette relation soit vérifiée quel que soit t , il faut $Im = C\omega Um$ et

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$Z = \frac{Um}{Im} = \frac{Um}{C\omega Um} = \frac{1}{C\omega}$$

$\varphi = -\frac{\pi}{2}$ La tension aux bornes du condensateur parfait est en quadrature retard sur l'intensité



.12.5.4 Tableau résumé

Dipôle	φ		Z	Y admittance
Résistance pure	0	u et i en phase	$Z = R$	$\frac{1}{R}$
Bobine parfaite d'inductance L	$+\frac{\pi}{2}$	u en quadrature avance sur i	$Z = L\omega$	$\frac{1}{L\omega}$
Condensateur parfait de capacité C	$-\frac{\pi}{2}$	u en quadrature retard sur i	$Z = \frac{1}{C\omega}$	$C\omega$

φ en rad ω en rad.s^{-1} L en H C en F Z en Ω Y en S

.12.6 EXERCICES

.12.6.1 * Exercice 1

On dispose d'une résistance $R= 10 \Omega$, d'une bobine parfaite d'inductance $L= 10 \text{ mH}$ et d'un condensateur parfait de capacité $C=5 \mu\text{F}$. Chacun de ces éléments est soumis à une tension sinusoïdale

$$u = 5 \cos 100\pi t \quad (\text{u en V et t en s})$$

1. Déterminer les valeurs de l'impédance et de l'admittance de chaque dipôle
2. Déterminer la valeur efficace de l'intensité du courant dans chaque cas ainsi que l'expression $i=f(t)$.
3. Préciser le déphasage entre i et u

.12.6.2 * Exercice 2.

Un dipôle soumis à une tension sinusoïdale de valeur efficace 5 V et de fréquence 100 Hz est parcouru par un courant de valeur maximale 0, 1 A ; l'intensité est en retard de phase de $\pi/6$ sur la tension.

Déterminer la valeur de l'impédance du dipôle.

Donner les expressions de $u=f(t)$ et de $i=f(t)$ et représenter les vecteurs de Fresnel associés à i et u :

dans le cas où la phase de u est nulle

dans le cas où la phase de i est nulle.

.12.7 CORRIGES DES EXERCICES

.12.7.1 Corrigé de l'exercice 1

Résistance :

$$Z = 10 \Omega \quad Y = 0,1 \text{ S} \quad I = \frac{U}{Z} \quad I = \frac{U_m}{\sqrt{2}R} = \frac{5}{\sqrt{2} \times 10} = 0,353 \text{ A}$$

i et u sont en phase ; les vecteurs de Fresnel ont même direction, même sens

$$i = 0,353\sqrt{2} \cos 100\pi t$$

$$\text{Bobine : } \omega = 100\pi \quad Z = L\omega = 10 \times 10^{-3} \times 100\pi = 3,14 \Omega$$

$$Y = 0,318 \text{ S} \quad I = \frac{U}{Z} \quad I = \frac{U_m}{\sqrt{2}Z} = \frac{5}{\sqrt{2} \times 3,14} = 1,12 \text{ A}$$

$$i \text{ est en quadrature retard sur } u \quad i = 1,12\sqrt{2} \cos(100\pi t - \frac{\pi}{2})$$

$$\text{Condensateur : } Z = \frac{1}{C\omega} \quad Z = \frac{1}{5 \times 10^{-6} \times 100\pi} = 637 \Omega \quad Y = 1,57 \times 10^{-3} \text{ S}$$

$$I = \frac{U}{Z} = UC\omega = \frac{5}{\sqrt{2}} 1,57 \times 10^{-3} = 5,55 \times 10^{-3} \text{ A} \quad i \text{ est en quadrature avance}$$

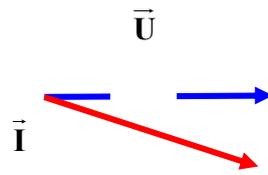
sur u

$$i = 5,55 \times 10^{-3} \cos(100\pi t + \frac{\pi}{2})$$

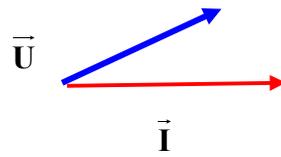
.12.7.2 Corrigé de l'exercice 2

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U\sqrt{2}}{I_m} \quad Z = \frac{5\sqrt{2}}{0,1} = 70,7 \Omega$$

$$\text{si la phase de } u \text{ est nulle} \quad u = 5\sqrt{2} \cos 200\pi t \quad i = 0,1 \cos(200\pi t - \frac{\pi}{6})$$

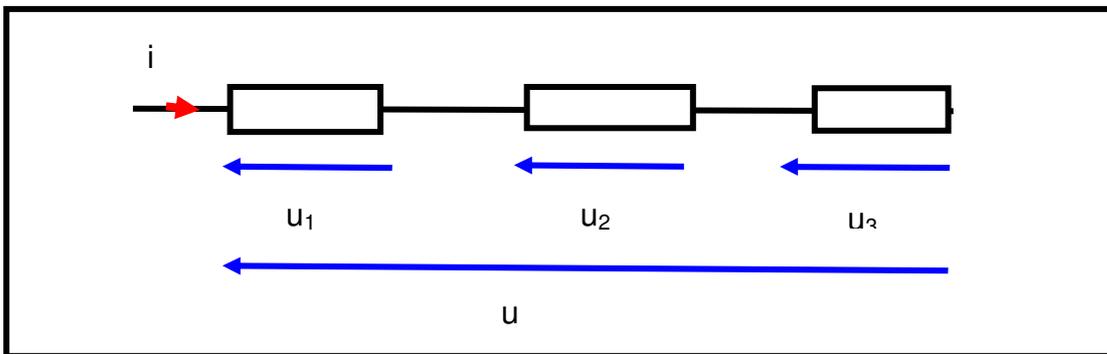


si la phase de i est nulle $i = 0,1 \cos 200\pi t$ $u = 5\sqrt{2} \cos(200\pi t + \frac{\pi}{6})$



.CHAPITRE 13 ASSOCIATIONS DE DIPOLES EN SERIE EN REGIME SINUSOIDAL. -. RESOLUTION PAR LA CONSTRUCTION DE FRESNEL

.13.1 GENERALITES



A chaque instant on peut écrire : $u = u_1 + u_2 + u_3$

Si $i = I_m \cos(\omega t)$ $u_1 = U_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ $u_2 = U_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$

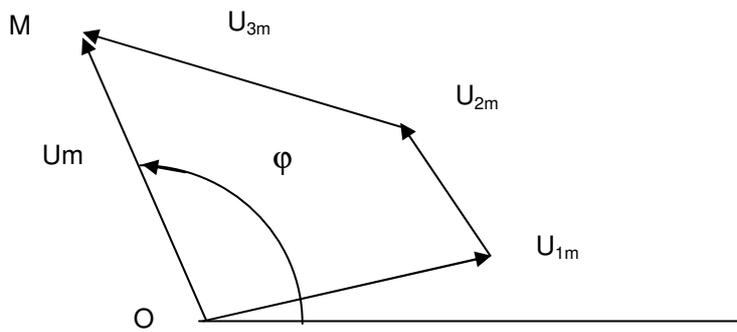
$u_3 = U_{3m} \cos(\omega t + \varphi_3)$

Dans ce cas $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

Si on associe à u_1 le vecteur $\overline{OM_1}$, à u_2 le vecteur $\overline{OM_2}$, à u_3 le vecteur $\overline{OM_3}$,

à la tension u est associé le vecteur \overline{OM} tel que $\overline{OM} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3}$

Remarque : dans le cas général $U_m \neq U_{1m} + U_{2m} + U_{3m}$ donc $Z \neq Z_1 + Z_2 + Z_3$



La construction permet de déterminer U_m et Φ ainsi que d'autres grandeurs (valeurs maximales de tensions et déphasages)

.13.2 DIPOLE R-C SERIE.

.13.2.1 Conventions.

Dans cette étude la tension appliquée entre les bornes du générateur sera $u = U_m \cos(\omega t + \varphi)$

L'intensité du courant qui traversera le circuit sera $i = I_m \cos \omega t$

.13.2.2 Montage.

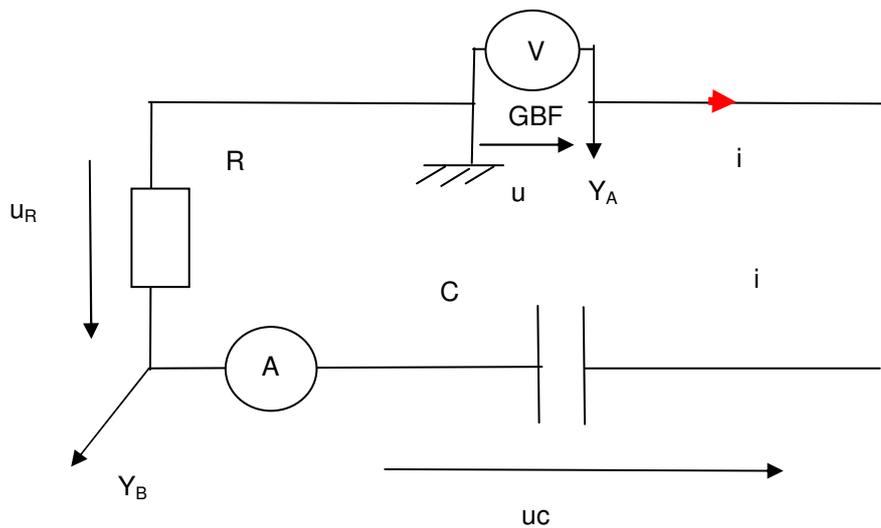
La tension $u=f(t)$, aux bornes du générateur basse fréquence (GBF), est visualisée sur la voie A de l'oscilloscope.

La tension aux bornes de la résistance $u_R = +Ri$ est visualisée sur la voie B de l'oscilloscope.

Comme u_R et i sont en phase, on peut visualiser sur la voie B l'allure de $i=f(t)$

Les deux courbes apparaissent sur l'écran de l'oscilloscope bicourbe et on peut déterminer leur déphasage.

L'ampèremètre permet de mesurer la valeur efficace de l'intensité du courant circulant dans le circuit. Le voltmètre placé entre les bornes du GBF permet de mesurer la valeur efficace de la tension appliquée par le GBF

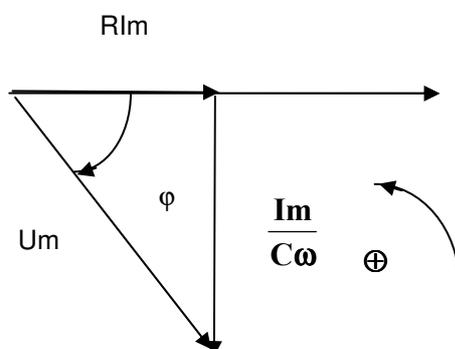
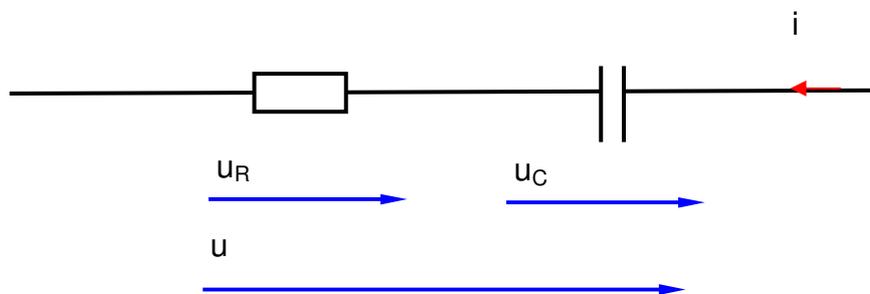


.13.2.3 Construction de Fresnel

A chaque instant $u = u_R + u_C$. La construction de Fresnel traduit cette relation

On sait que:

- La tension aux bornes de la résistance est en phase avec l'intensité
- La tension aux bornes du condensateur parfait est en quadrature retard sur l'intensité



.13.2.4 Impédance du dipôle

Par application du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle :

$$U_m^2 = R^2 I_m^2 + \left(\frac{I_m}{C\omega}\right)^2 \quad \text{d'où} \quad Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}$$

.13.2.5 Déphasage entre i et u

φ est < 0 : la tension aux bornes du condensateur est en retard de phase sur l'intensité ; c'est caractéristique d'un montage capacitif

$$\tan \varphi = -\frac{R I_m}{\frac{I_m}{C\omega}} = -RC\omega \quad \cos \varphi = \frac{R I_m}{U_m} = \frac{R I_m}{Z I_m} = \frac{R}{Z}$$

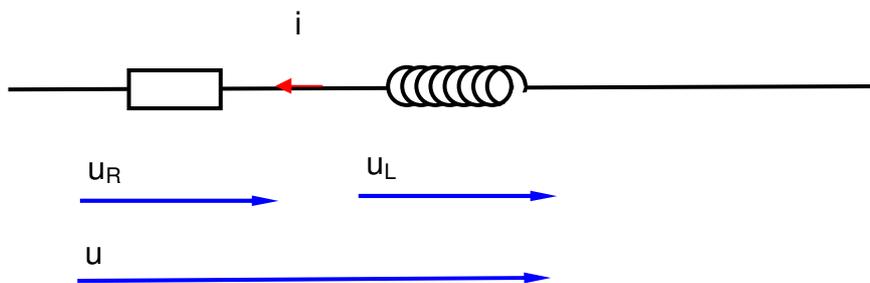
□ Exercice 1

.13.3 DIPOLE R-L SERIE

.13.3.1 Schéma

Le dipôle est constitué d'une résistance R, en série avec une bobine d'inductance L.

Il peut aussi représenter une bobine réelle de résistance R et d'inductance L

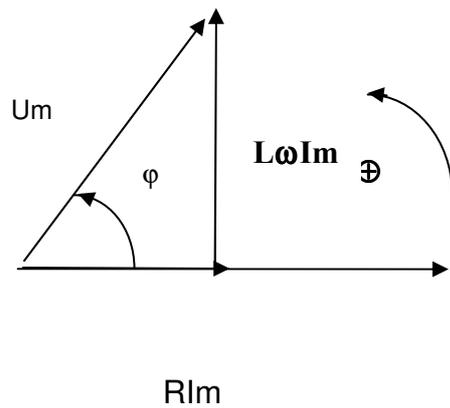


.13.3.2 Construction de Fresnel

A chaque instant $u = u_R + u_L$ La construction de Fresnel traduit cette relation

On sait que:

- La tension aux bornes de la résistance est en phase avec l'intensité
- La tension aux bornes de la bobine parfaite est en quadrature avancée sur l'intensité



.13.3.3 Impédance du dipôle

Par application du théorème de Pythagore dans le triangle rectangle :

$$U_m^2 = R^2 I_m^2 + (L\omega I_m)^2 \quad \text{d'où} \quad Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}$$

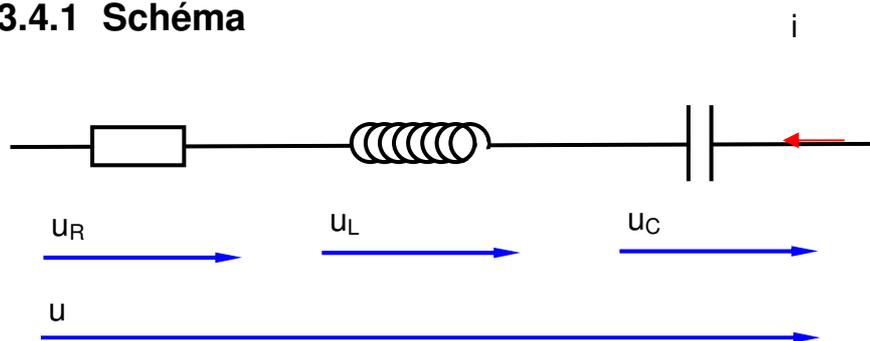
.13.3.4 Déphasage entre i et u

φ est > 0 : la tension aux bornes du montage est en avance de phase sur l'intensité ; c'est caractéristique d'un montage inductif

$$\tan \varphi = \frac{R I_m}{L\omega I_m} = \frac{R}{L\omega} \quad \cos \varphi = \frac{R I_m}{U_m} = \frac{R I_m}{Z I_m} = \frac{R}{Z}$$

.13.4 DIPOLE R-L-C SERIE

.13.4.1 Schéma



.13.4.2 Construction de Fresnel

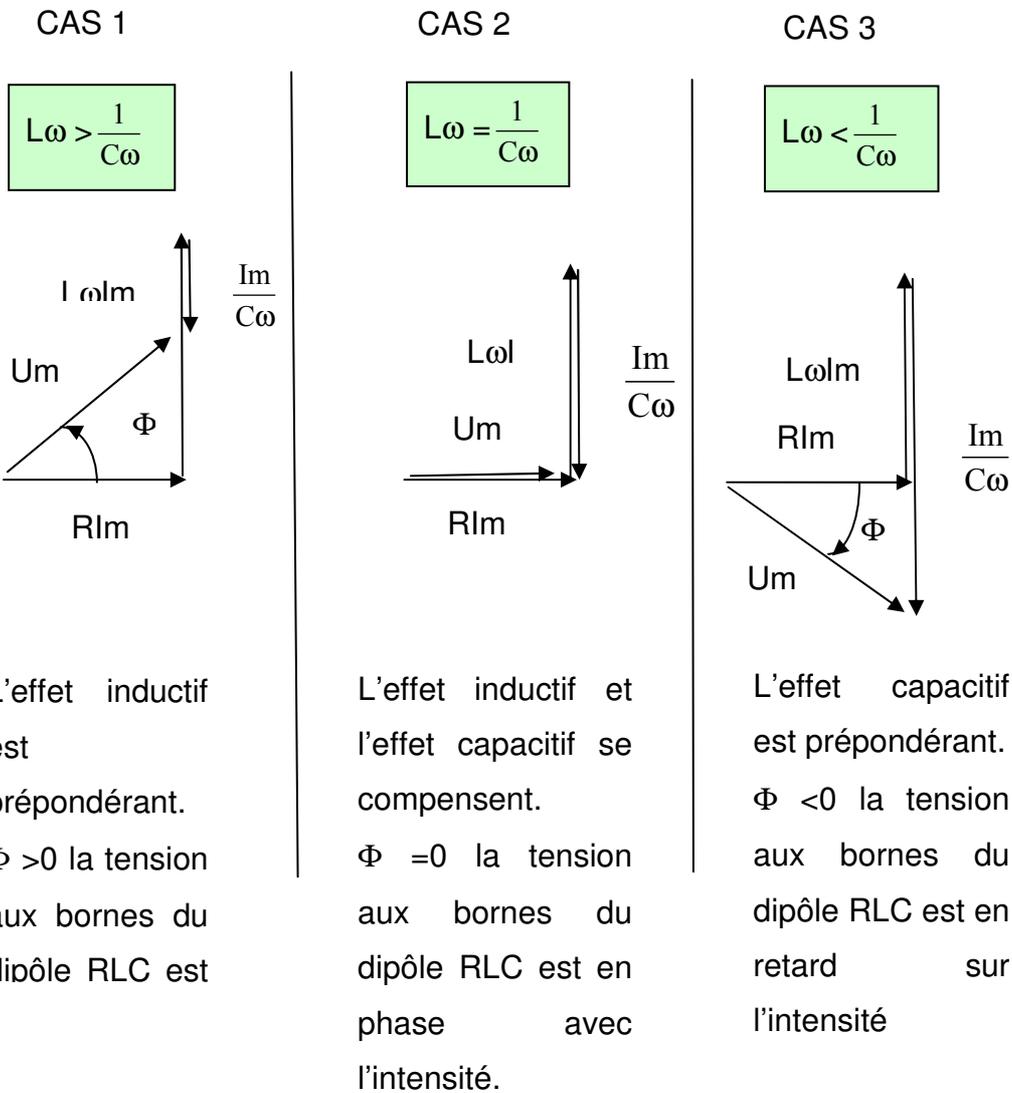
$$\text{Si } i = I_m \cos(\omega t) \quad u_R = U_{Rm} \cos(\omega t) = Z_R I_m \cos(\omega t) = R I_m \cos(\omega t)$$

$$u_L = U_{Lm} \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = Z_L I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = L\omega I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$u_C = U_{Cm} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = Z_C \cdot I_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{C\omega} \cdot I_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$u = U_m \cos(\omega t + \Phi)$$

.13.4.3 Calcul de Z et de ϕ



Il y a trois cas possibles :

Le cas 2 (résonance d'intensité) sera vu ultérieurement.

Dans les cas 1 et 3 on peut appliquer le théorème de Pythagore au triangle rectangle

$$U_m^2 = (R \cdot I_m)^2 + (L\omega \cdot I_m - \frac{1}{C\omega} \cdot I_m)^2 \quad \text{d'où} \quad U_m = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \cdot I_m$$

$$Z = \frac{U_m}{I_m} \quad Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$$

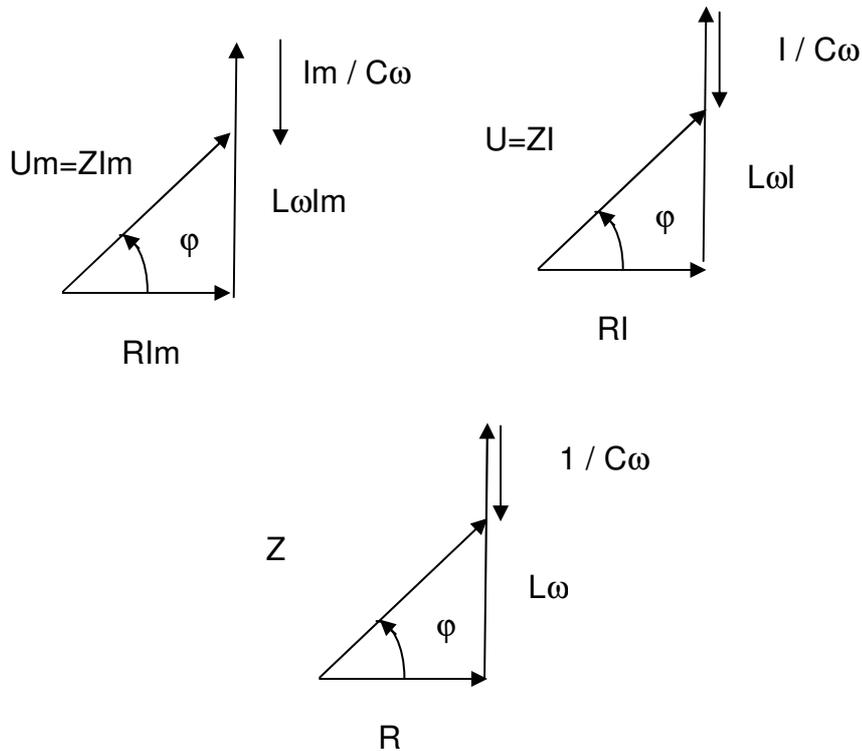
$$\tan \varphi = \frac{L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega}}{R I_m} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

$$\text{et } \cos \varphi = \frac{R I_m}{U_m} = \frac{R I_m}{Z I_m} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Remarque :

La construction de Fresnel peut être réalisée en utilisant les valeurs maximales ou les valeurs efficaces des tensions ou encore les impédances.

Exemple : dans le cas 1 on aurait pu utiliser l'une des trois constructions suivantes :



□ Exercice 2

.13.5 EXERCICES.

.13.5.1 Exercice 1

Un condensateur de capacité $C = 5 \mu\text{F}$ est monté en série avec un résistor de résistance $R = 300 \Omega$. On applique à l'ensemble une tension de valeur efficace 200 V et de fréquence 100 Hz . Calculer :

1. L'impédance du dipôle RC.
2. La valeur de l'intensité du courant.
3. Les tensions efficaces partielles aux bornes du résistor et du condensateur.
4. Le déphasage entre i et u

.13.5.2 Exercice 2

Deux récepteurs sont branchés en série sous une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 240 \text{ V}$ et de fréquence 50 Hz .

Le premier récepteur est une bobine de résistance R_1 et d'inductance L .

Le deuxième récepteur est constitué d'une résistance R_2 en série avec un condensateur de capacité C

La réactance de la bobine vaut 50Ω et celle du condensateur 150Ω .

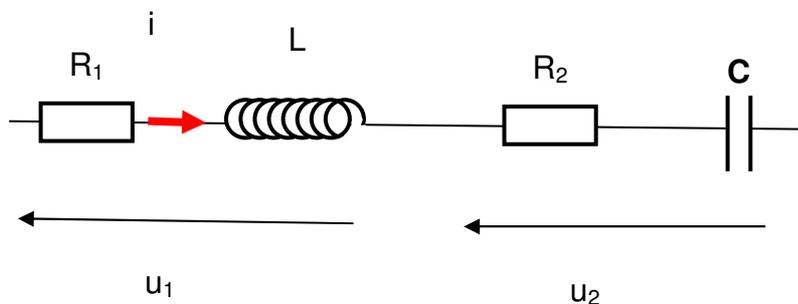
$$R_1 = 50 \Omega \quad R_2 = 100 \Omega$$

Calculer L et C

Déterminer la valeur de l'intensité I du courant

Déterminer les déphasages entre les tensions u_1 et u_2 et i

Quel est le déphasage de u_2 par rapport à u_1 ?



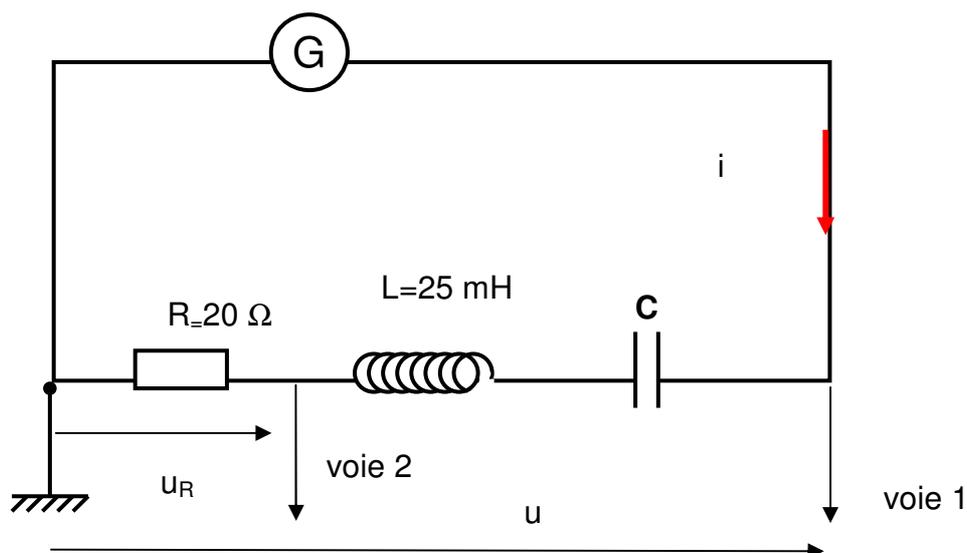
.13.5.3* Exercice 3

On applique une tension de 120 V, 50 Hz entre les bornes d'un dipôle comportant en série une bobine inductive et résistive et un condensateur. La valeur efficace de la tension entre les bornes du condensateur est 60 V. Sachant que $R = 380 \Omega$ et $C = 16 \mu\text{F}$.

1. Calculer l'intensité du courant dans le dipôle.
2. Calculer l'impédance du dipôle puis l'inductance de la bobine.
3. Construire les graphiques de Fresnel correspondant aux deux solutions.
4. Déterminer les valeurs efficaces des tensions aux bornes des composants ainsi que les déphasages entre i et ces tensions.

.13.5.4* Exercice 4

On réalise le montage suivant :

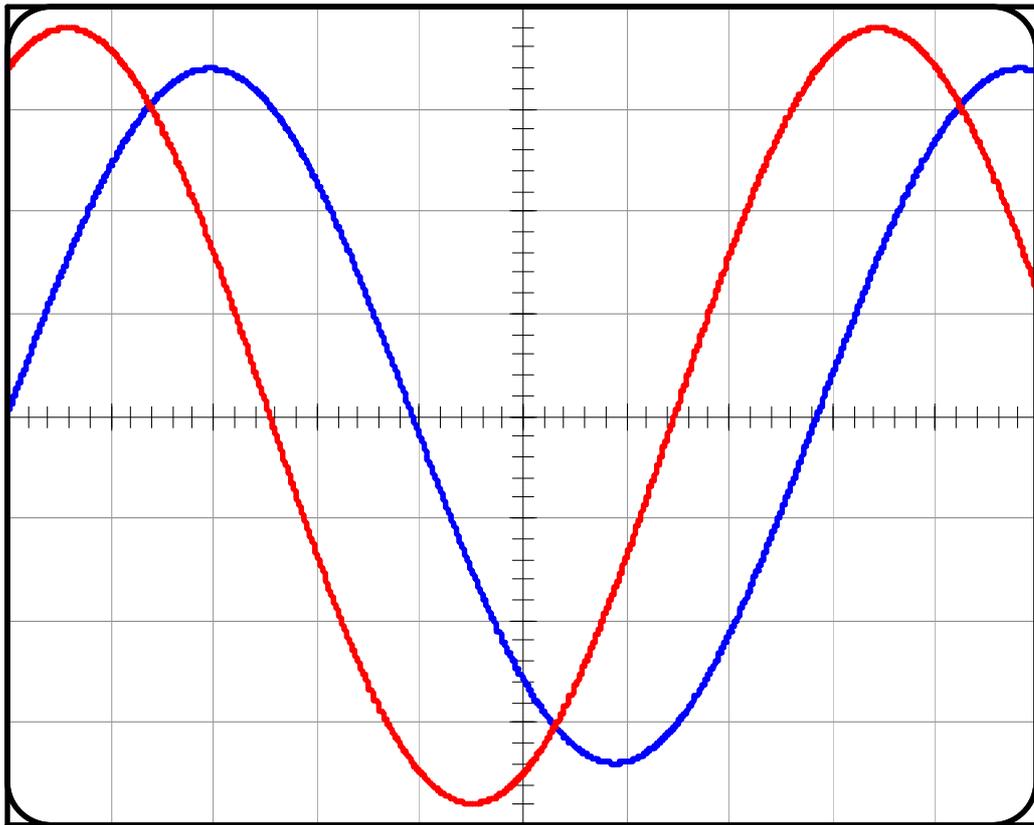


Les réglages de l'oscilloscope sont :

sensibilité verticale voie 1 : 5 V / div

sensibilité verticale voie 2 : 2 V / div

Base de temps : 2 ms / div



Sur l'oscillogramme, la tension qui a la plus petite amplitude est u

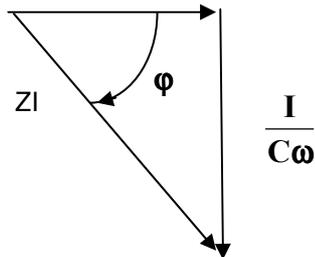
1. Déterminer les valeurs efficaces des tensions u_R et u
2. Déterminer la valeur efficace de l'intensité du courant
3. Déterminer la période, la fréquence et la pulsation du courant
4. déterminer, à partir de l'oscillogramme, le déphasage entre u et i . Donner l'expression de $i=f(t)$ si $u = U_m \cos \omega t$
5. Déterminer la valeur de C
6. Calculer la valeur de l'impédance du dipôle RLC de deux manières différentes.
7. Faire la représentation de Fresnel

.13.6 CORRIGE DES EXERCICES

.13.6.1 Corrigé de l'exercice 1

$$Z = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2 \omega^2}} \qquad Z = \sqrt{300^2 + \frac{1}{(5 \times 10^{-6})^2 (200\pi)^2}} = 437,4 \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} \qquad I = \frac{200}{437,4} = 0,457 \text{ A}$$



$$U_R = RI \qquad U_R = 300 \times 0,457 = 137,1 \text{ V}$$

$$U_C = \frac{I}{C\omega} \qquad U_C = \frac{0,437}{5 \times 10^{-6} \times 200\pi} = 139,1 \text{ V}$$

$$\tan \varphi = -\frac{1}{RC\omega} \qquad \tan \varphi = -\frac{1}{300 \times 5 \times 10^{-6} \times 200\pi} = -1,06 \qquad \varphi = -46,7^\circ$$

L'intensité i est en avance sur la tension de 46,7 degrés.

.13.6.2 Corrigé de l'exercice 2

$$L\omega = 50 \qquad L = \frac{50}{2\pi 50} = 0,16 \text{ H}$$

$$\frac{1}{C\omega} = 150 \qquad C = \frac{1}{150 \times 2\pi \times 50} = 21,2 \times 10^{-6} \text{ F}$$

$$Z = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \qquad Z = \sqrt{(50 + 100)^2 + (50 - 150)^2} = 180,3 \Omega$$

$$I = \frac{U}{Z} \qquad I = \frac{240}{180,3} = 1,33 \text{ A}$$

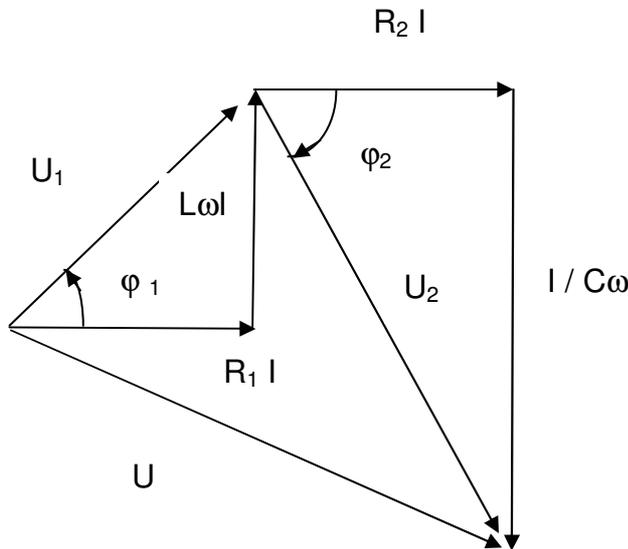
$$\tan \varphi_1 = \frac{L\omega}{R_1} \qquad \tan \varphi_1 = \frac{50}{50} \qquad \varphi_1 = 45^\circ$$

$$\tan \varphi_2 = -\frac{1}{C\omega R_2} \qquad \tan \varphi_2 = -\frac{150}{100} \qquad \varphi_2 = -56,3^\circ$$

φ_1 est le déphasage de u_1 par rapport à i u_1 est en avance de phase sur i
 φ_2 est le déphasage de u_2 par rapport à i u_2 est en retard de phase sur i
 De déphasage de u_2 par rapport à u_1 est :

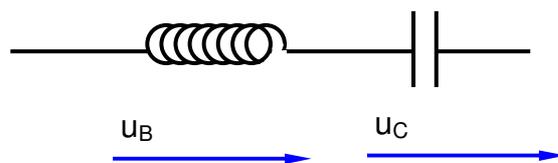
$$(\vec{U}_1, \vec{U}_2) = \varphi_2 - \varphi_1 = -56,3 - 45 = -101,3^\circ$$

u_2 est en retard de phase sur u_1 de $101,3^\circ$



.13.6.3 Corrigé de l'exercice 3

u_B est la tension aux bornes de la bobine (L, R)



Calcul de I : $I = \frac{U_C}{Z_C} = \frac{U_C}{\frac{1}{C\omega}} = U_C C \omega$ $I = 60 \times 16 \times 10^{-6} \times 2 \times \pi \times 50 = 0,3 \text{ A}$

Calcul de l'impédance Z du dipôle RLC. $Z = \frac{U}{I}$ $Z = \frac{120}{0,3} = 400 \Omega$

Calcul de l'inductance de la bobine :

$$L = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{C\omega} \pm \sqrt{Z^2 - R^2} \right) \quad L = \frac{1}{100\pi} \left(\frac{1}{16 \times 10^{-6} \times 100\pi} \pm \sqrt{400^2 - 380^2} \right)$$

$$L = \frac{1}{100\pi} (198,9 \pm 124,9) \quad \text{Il y a deux solutions : } L_1 = 1,03 \text{ H et } L_2 = 0,235 \text{ H}$$

Etude des deux solutions :

$$\text{Dans les deux cas : } I = 0,3 \text{ A} \quad \frac{1}{C\omega} = 198,4 \Omega \quad U_R = RI = 114 \text{ V} \quad U_C = 60$$

$$V \quad U = 120 \text{ V}$$

Solution 1

$$L_1 = 1,03 \text{ H} \quad L\omega = 1,03 \times 100\pi = 323,6 \Omega \quad L\omega > \frac{1}{C\omega} \quad L\omega I = 97,1 \text{ V}$$

L'effet inductif est prépondérant.

$$\tan \varphi_1 = \frac{L_1\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \quad \varphi_1 = 18,4 \text{ degrés}$$

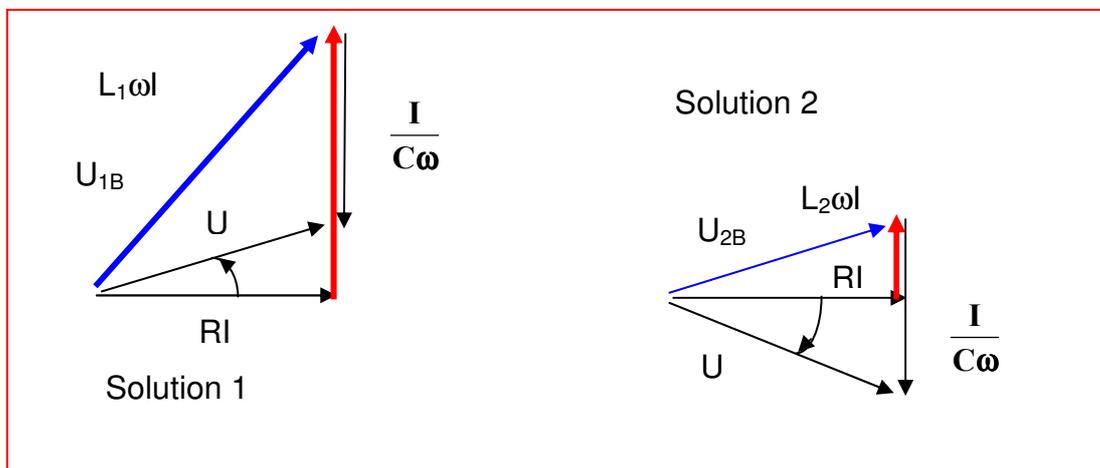
i est en retard de phase sur u

Solution 2

$$L_2 = 0,235 \text{ H} \quad L\omega = 0,235 \times 100\pi = 73,8 \Omega \quad L\omega < \frac{1}{C\omega} \quad L\omega I = 22,1 \text{ V}$$

L'effet capacitif est prépondérant.

$$\tan \varphi_2 = \frac{L_2\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \quad \varphi_2 = -18,4 \text{ degrés}$$



.13.6.4 Corrigé de l'exercice 4

$$1. U_{Rm} \text{ correspond à } 3,7 \text{ div} \quad U_{Rm} = 3,7 \times 2 = 7,4 \text{ V} \quad U_R = \frac{7,4}{\sqrt{2}} = 5,23 \text{ V}$$

$$U_m \text{ correspond à } 3,4 \text{ div} \quad U_m = 3,4 \times 5 = 17 \text{ V} \quad U = \frac{17}{\sqrt{2}} = 12 \text{ V}$$

$$2. I = \frac{U_R}{R} \quad I = \frac{5,23}{20} = 0,262 \text{ A}$$

3. Une période correspond à 7,8 div $T = 7,8 \times 2 = 15,6 \text{ ms}$

$$f = \frac{1}{T} \quad f = \frac{1}{15,6 \times 10^{-3}} = 64,1 \text{ Hz} \quad \omega = 2\pi f \quad \omega = 403 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

4. D'après l'oscillogramme, u est en retard sur $u_R = Ri$ et par conséquent, u est en retard sur i

Le décalage horizontal entre les sommets des deux courbes est de 1,4 div.

Un décalage de 7,8 cm correspondrait à un décalage horaire de T et à un

déphasage de 2π . On en déduit que $|\varphi| = \frac{1,4}{7,8} 2\pi = 1,13 \text{ rad}$

$$u = 17 \cos \omega t \quad i = 0,24\sqrt{2} \cos(\omega t + 1,13) = 0,34 \cos(\omega t + 1,13)$$

Le déphasage de u par rapport à i est donc $\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0 - \varphi_i = -1,13 \text{ rad}$

$$5. \tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \Rightarrow C = \frac{1}{\omega(L\omega - R \tan \varphi)}$$

$$C = \frac{1}{403(0,025 \times 403 - 20 \tan(-1,13))} = 47,3 \times 10^{-6} \text{ F}$$

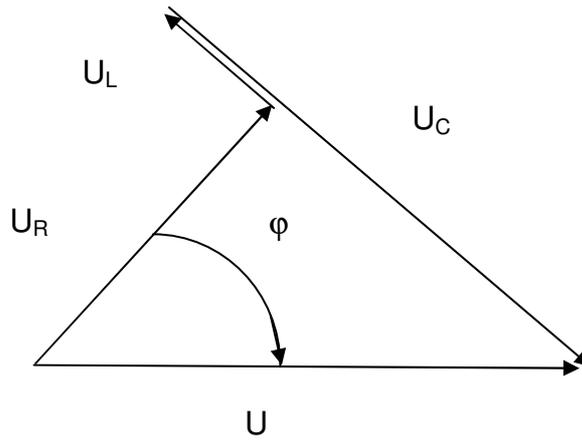
$$6. Z = \frac{U}{I} \quad Z = \frac{12}{0,262} = 45,8 \text{ } \Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \quad Z = \sqrt{20^2 + (0,025 \times 403 - \frac{1}{47,5 \times 10^{-6} \times 403})^2}$$

$Z = 46,6 \text{ } \Omega$ Ces résultats sont différents à cause de l'imprécision dans la lecture des courbes.

7.

La tension est sur l'axe de référence



$$U = 12 \text{ V}$$

$$U_R = 5,23 \text{ V}$$

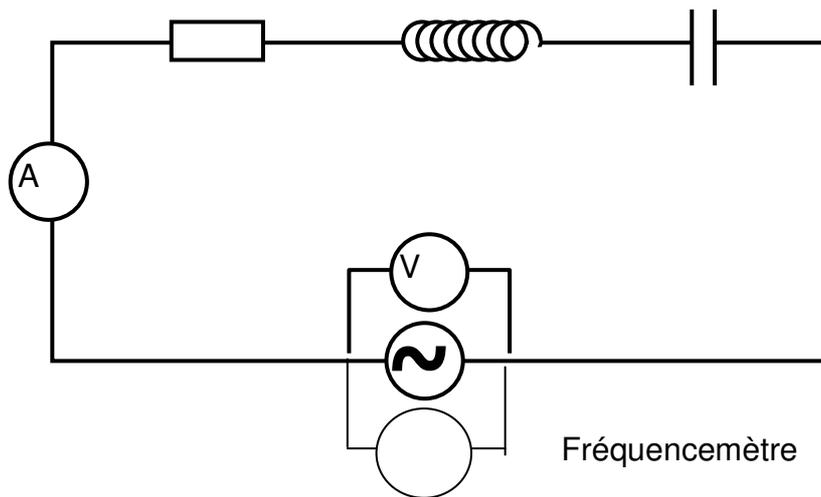
$$U_L = L\omega I = 2,64 \text{ V}$$

$$U_C = \frac{I}{C\omega} = 13,74 \text{ V}$$

La construction n'est pas réalisée à l'échelle.

.CHAPITRE 14 CIRCUIT RLC SERIE - RESONANCE D' INTENSITE

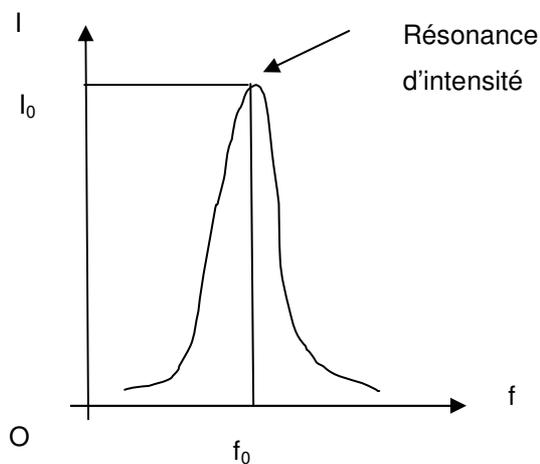
.14.1 LA RESONANCE D'INTENSITE



On applique à un dipôle RLC dont les paramètres ne sont pas modifiés une tension sinusoïdale de valeur efficace U constante et de fréquence variable.

On trace la courbe représentant l'intensité efficace I en fonction de la fréquence f (courbe de réponse en intensité)

Pour une valeur f_0 , la réponse du dipôle est maximale, l'intensité est maximale ; le circuit est alors en résonance d'intensité.



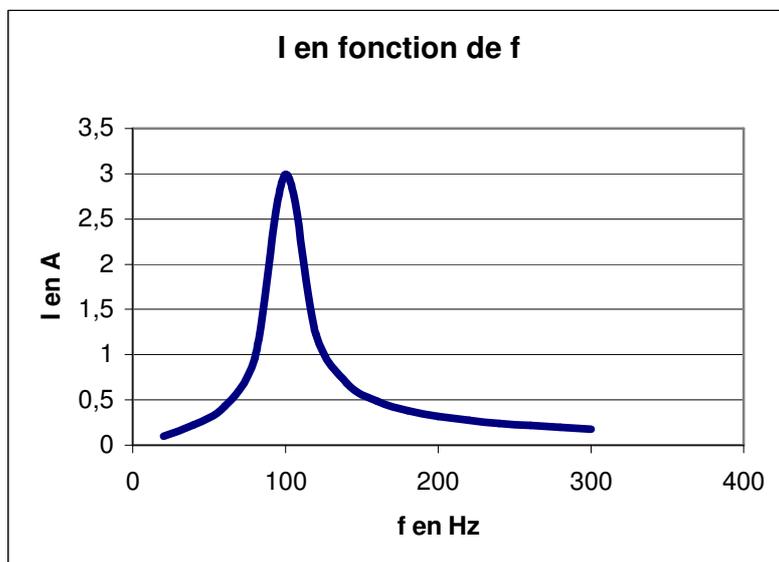
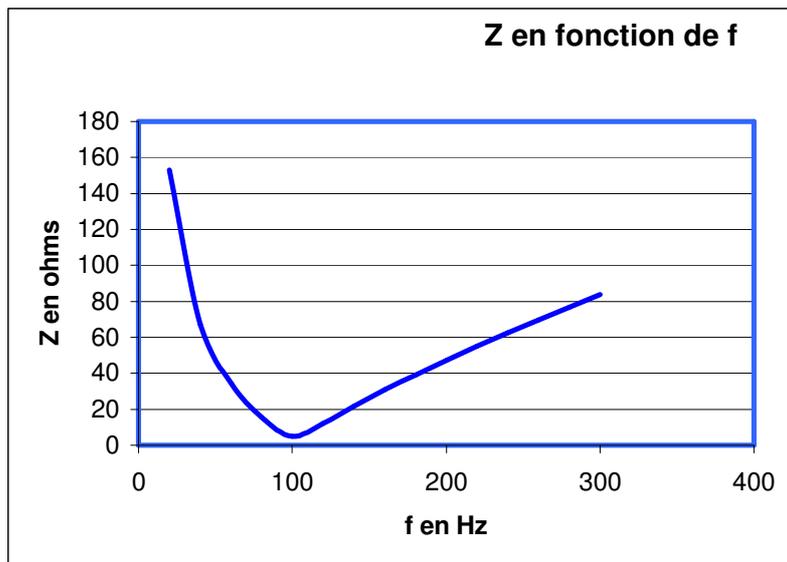
.14.2 ACTIVITE 1 -TRACE DE COURBES

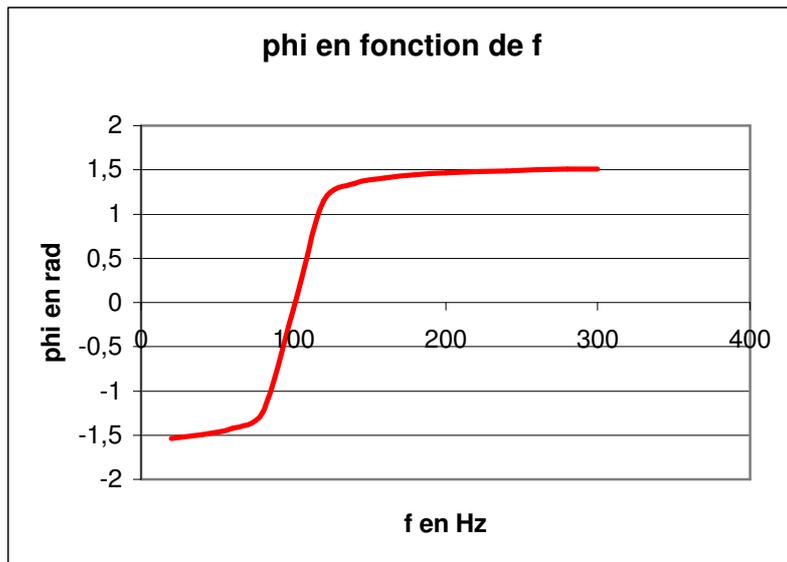
Tracer, à l'aide d'un tableur-grapheur, les courbes représentant Z, I et φ en fonction de la fréquence f en prenant :

$$U = 15 \text{ V} \quad R = 5 \, \Omega \quad L = 50 \text{ mH} \quad C = 50 \, \mu\text{F}$$

Faire varier la fréquence de 20 à 300 Hz

Déterminer la fréquence de résonance.





La fréquence de résonance est de 100,6 Hz

.14.3 RELATIONS A LA RESONANCE

.14.3.1.1 Fréquence à la résonance.

la résonance est obtenue pour $f = f_0$ c'est-à-dire pour $\omega_0 = 2\pi f_0$, d'où :

$$L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \Leftrightarrow L.C.\omega_0^2 = 1 \qquad LC4\pi^2 f_0^2 = 1 \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad f_0 \text{ est la}$$

fréquence de résonance

.14.3.1.2 Impédance à la résonance.

$I = \frac{U}{Z}$ $U = \text{cte}$ I est maximale à la résonance donc Z est minimale à

la résonance.

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \text{quand } \omega \text{ varie } Z \text{ est minimale si } L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$$

.14.3.1.3 Intensité à la résonance.

A la résonance l'impédance est minimale $Z = Z_0 = R$

Valeur efficace de l'intensité à la résonance.

A la résonance $I = I_0 = \frac{U}{Z_0} = \frac{U}{R}$ l'intensité efficace et l'amplitude de

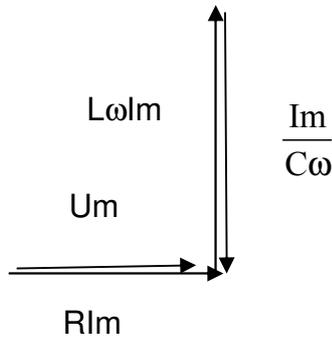
l'intensité sont maximales.

.14.3.1.4 Déphasage à la résonance.

$$\tan \varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \text{ est alors nulle}$$

A la résonance, u et i sont en phase $\varphi = 0$

.14.3.1.5 Construction de Fresnel à la résonance



.14.3.1.6 Tension aux bornes du condensateur à la résonance

A la résonance, les valeurs efficaces des tensions aux bornes de L et de C sont égales

$$(U_L)_0 = L\omega_0 I_0 = \frac{1}{C\omega_0} I_0 = (U_C)_0$$

A la résonance, les valeurs efficaces des tensions aux bornes de L et de C sont égales et peuvent être très grandes par rapport à U

.14.3.2 COEFFICIENT DE SURTENSION σ

.14.3.2.1 Définition

Le coefficient de surtension est le quotient de la valeur efficace de la tension aux bornes du condensateur par la valeur efficace de la tension appliquée au dipôle RLC.

$$\sigma = \frac{U_C}{U} = \frac{I}{ZI} = \frac{1}{ZC\omega}$$

.14.3.2.2 Coefficient de surtension à la résonance σ_0

$$\text{A la résonance } \sigma_0 = \frac{(U_C)_0}{U} = \frac{I_0}{Z_0 I_0} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{L\omega_0}{R}$$

Le facteur de surtension n'a pas d'unité

.14.3.3 FACTEUR DE QUALITE Q

.14.3.3.1 Définition

Le coefficient de qualité est le quotient de la réactance de la bobine par la résistance du dipôle RLC.

$$Q = \frac{L\omega}{R}$$

.14.3.3.2 Facteur de qualité à la résonance Q_0

$$Q_0 = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} \quad \text{on remarque que } Q_0 = \sigma_0$$

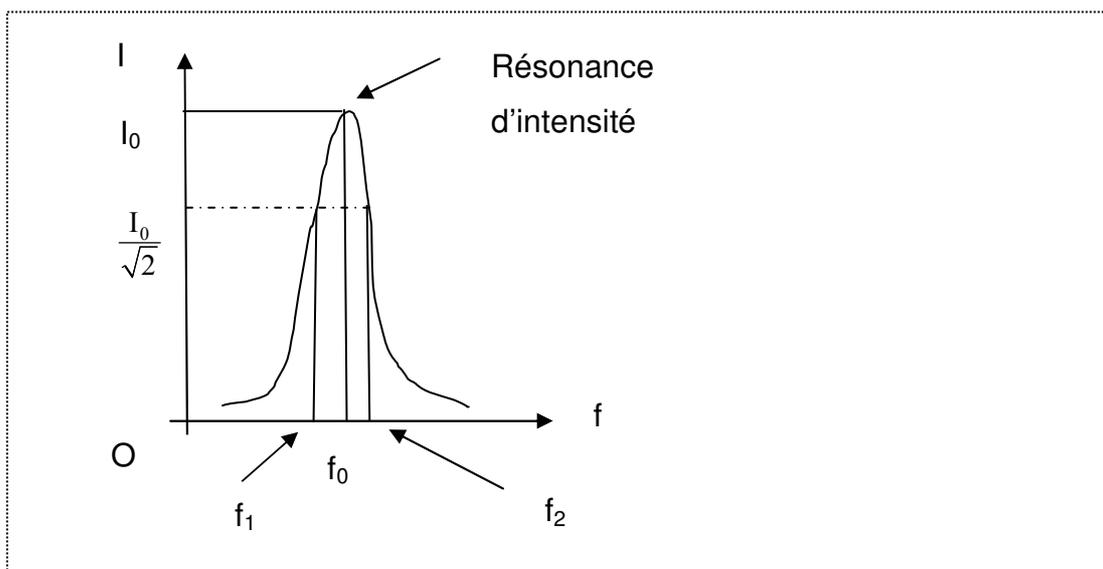
Le facteur de qualité n'a pas d'unité

.14.3.4 BANDE PASSANTE

.14.3.4.1 Définition de la bande passante à - 3dB

C'est le domaine de fréquence $\{f_1; f_2\}$ pour lequel $I \geq \frac{I_0}{\sqrt{2}}$; aux extrémités

de la bande passante à - 3dB (-3 décibels), $20 \log\left(\frac{I_0}{I}\right) = 3$



.14.3.4.2 Définition de la bande passante à - 6dB

La bande passante à -6 dB serait le domaine de fréquence $\{f_1; f_2\}$ pour lequel $\frac{I}{I_0} = 0,5$; aux extrémités de la bande passante à -6 dB (décibels),

$$20 \log\left(\frac{I_0}{I}\right) = 6$$

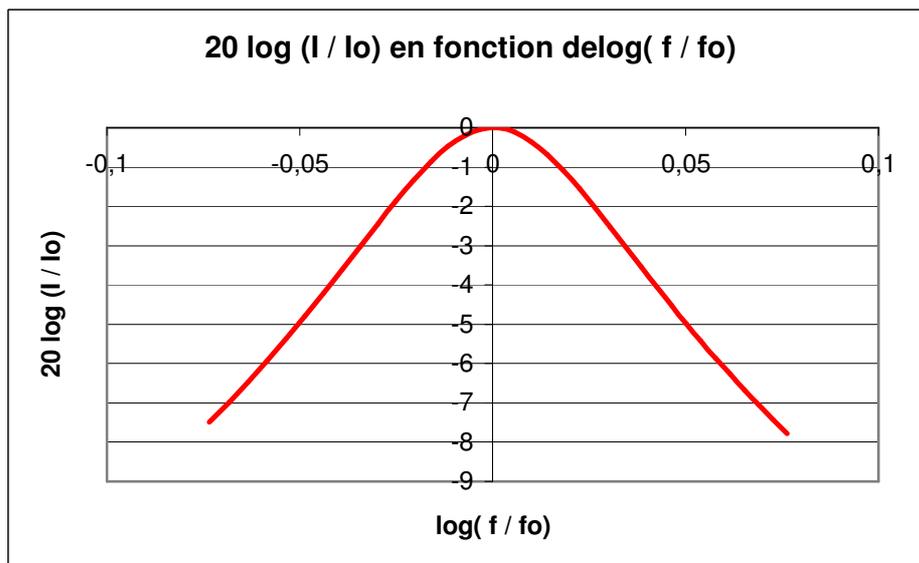
.14.4 ACTIVITE 2 NOTION DE BANDE PASSANTE A -3 DB

.14.4.1 Activité

$U = 15 \text{ V}$ $R = 5 \Omega$ $L = 50 \text{ mH}$ $C = 50 \mu\text{F}$

On fait varier la fréquence de 80 à 120 Hz

A l'aide d'un tableur-grapheur, on trace la courbe représentative de $20 \log(I/I_0)$ en fonction de $\log(f/f_0)$ et on détermine d'après la courbe la largeur de la bande passante à -3 dB.



Sur la courbe on constate que pour $20 \lg(I/I_0) = -3$,

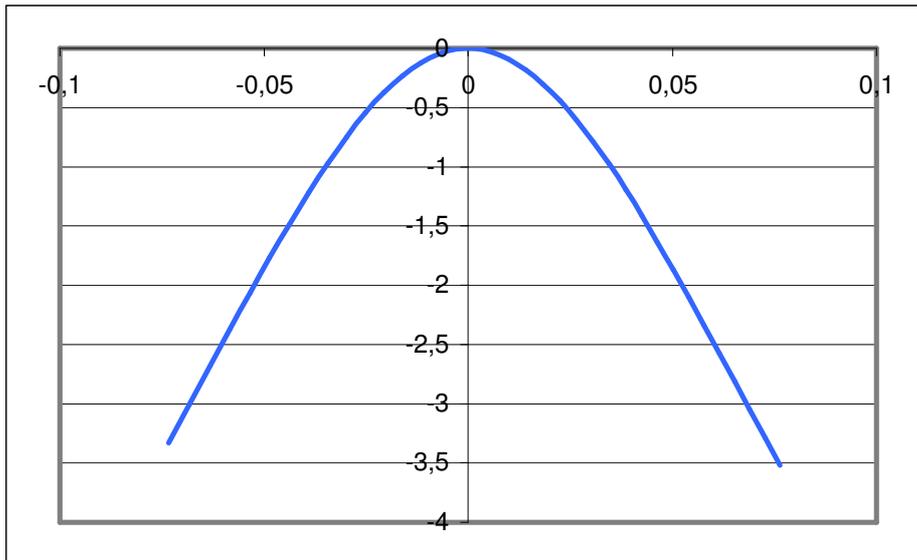
$$-0,034 \leq \lg\left(\frac{f}{f_0}\right) \leq 0,034 \quad \text{or } f_0 = 100,6 \text{ Hz} \quad \text{d'où } 93 \leq f \leq 109 \text{ Hz}$$

$f_1 = 93 \text{ Hz}$ $f_2 = 109 \text{ Hz}$ $\Delta f = f_2 - f_1 = 16 \text{ Hz}$

On recommence la même étude dans les conditions suivantes :

$U = 15 \text{ V}$ $R = 10 \Omega$ $L = 50 \text{ mH}$ $C = 50 \mu\text{F}$

On a donc augmenté R



Sur la courbe on constate que pour $20 \lg(I / I_0) = -3$,

$$-0,068 \leq \lg\left(\frac{f}{f_0}\right) \leq 0,069 \quad \text{or } f_0 = 100,6 \text{ Hz} \quad \text{d'où } 86 \leq f \leq 118 \text{ Hz}$$

$$f_1 = 86 \text{ Hz} \quad f_2 = 118 \text{ Hz} \quad \Delta f = f_2 - f_1 = 32 \text{ Hz}$$

La largeur de la bande passante à -3 dB est plus importante dans le deuxième cas

.14.4.2 Détermination de la largeur de la bande passante à -3 dB

$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ pour $f = f_1$ et pour $f = f_2$, aux extrémités de la bande passante.

$$\frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{2}Z_0} = \frac{U}{\sqrt{2}R} \quad \Rightarrow Z = \sqrt{2}R \quad Z^2 = 2R^2$$

$$R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = 2R^2 \quad \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2 = R^2 \quad \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R$$

Première solution de l'équation :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = R \Rightarrow LC\omega^2 + RC\omega - 1 = 0 \quad \text{Cette équation admet deux racines ;}$$

on retient la racine positive car $\omega > 0$ $\omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{R^2C^2 + 4L^2C^2}}{2LC}$

Deuxième solution de l'équation :

$$\Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = -R \Rightarrow LC\omega^2 - RC\omega - 1 = 0 \quad \text{Cette équation admet deux}$$

$$\text{racines ; on retient la racine positive car } \omega > 0 \quad \omega_2 = \frac{RC + \sqrt{R^2C^2 + 4L^2C^2}}{2LC}$$

Largeur de la bande passante (en rad.s⁻¹)

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{RC + \sqrt{R^2C^2 + 4L^2C^2}}{2LC} - \frac{-RC + \sqrt{R^2C^2 + 4L^2C^2}}{2LC}$$

$$\Delta\omega = \frac{2RC}{2LC} = \frac{R}{L}$$

Largeur relative de la bande passante

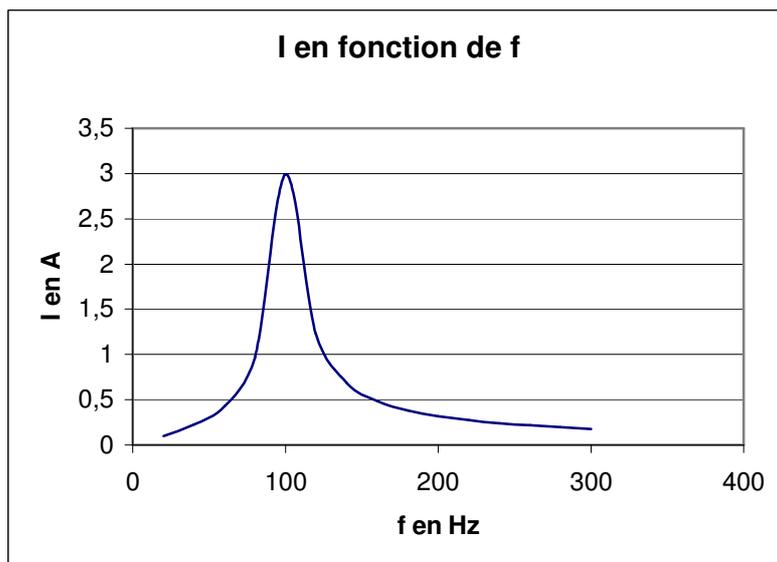
$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{R}{L\omega_0} = \frac{1}{Q_0}$$

Largeur de la bande passante (en fréquence)

$$\Delta f = f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L}$$

.14.5 ACTIVITE 3 - DETERMINATION EXPERIMENTALE DE LA LARGEUR DE LA BANDE PASSANTE

$$U = 15 \text{ V} \quad R = 5 \Omega \quad L = 50 \text{ mH} \quad C = 50 \mu\text{F}$$



A partir de la courbe de I en fonction de la fréquence, déterminer la largeur de la bande passante à - 3 dB.

Comparer le résultat aux valeurs théoriques.

Réponse :

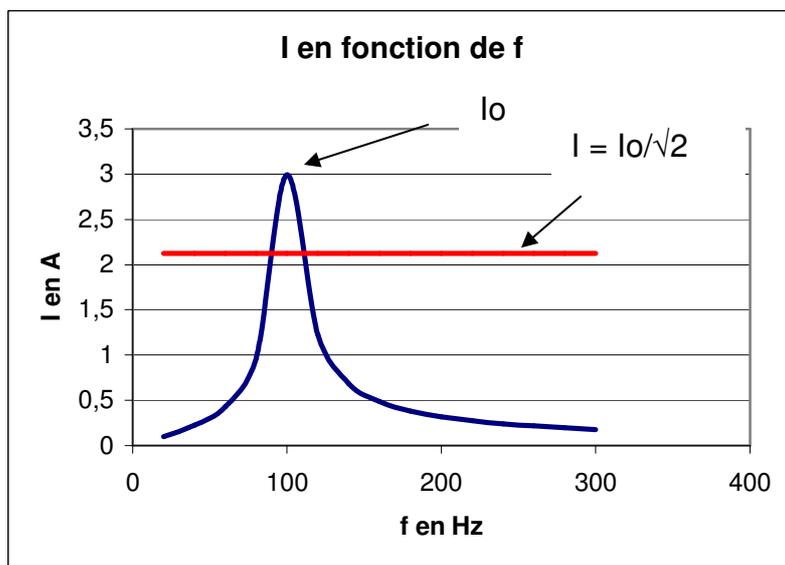
On détermine sur la courbe, les fréquences pour lesquelles $I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$

La bande passante à -3dB est le domaine de fréquence compris entre 93 et 109 Hz

$$\Delta f = 16 \text{ Hz} \quad \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{16}{100,6} \approx 0,16$$

D'après l'étude théorique

$$\Delta f = \frac{R}{2\pi L} \quad \frac{\Delta f}{f_0} = \frac{R}{f_0 2\pi L} = \frac{5}{100,6 \times 2\pi \times 0,05} \approx 0,16$$



.14.6 ACTIVITE 4 INFLUENCE DE R SUR LA LARGEUR DE LA BANDE PASSANTE

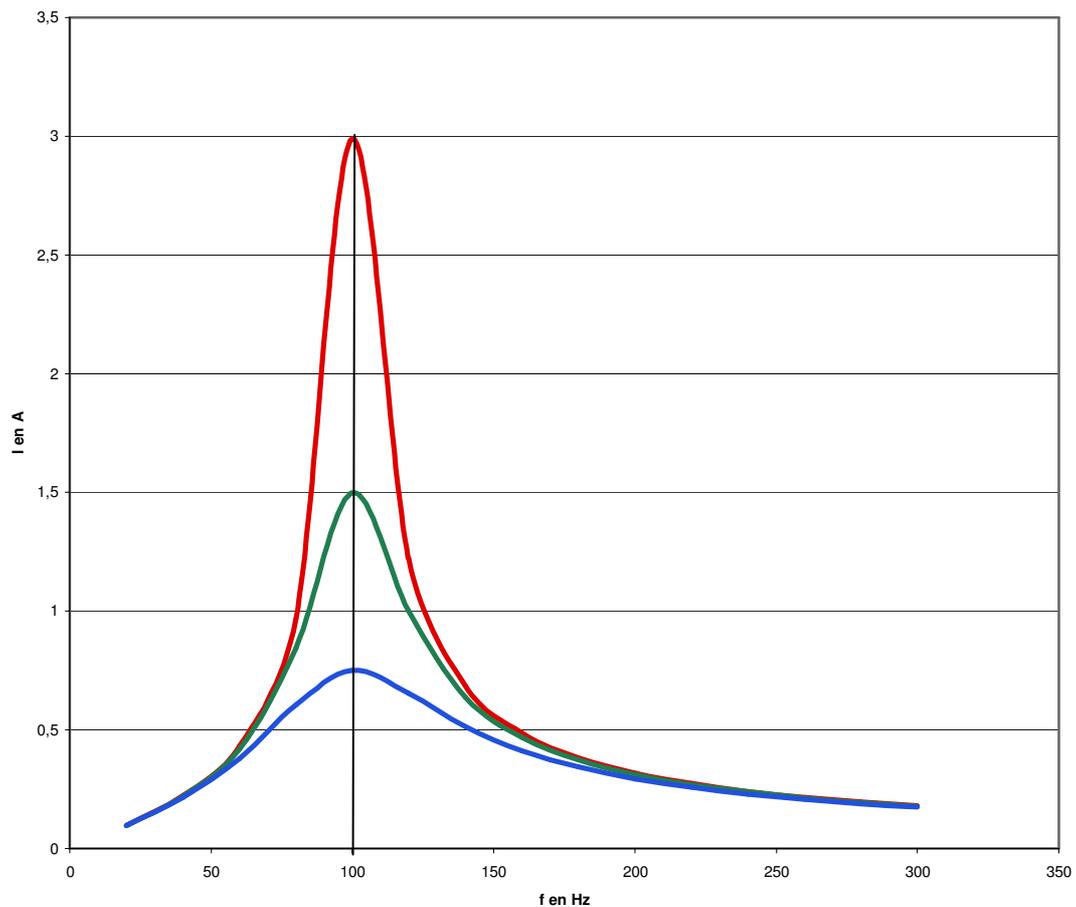
Tracer, à l'aide d'un tableur-grapheur, les courbes représentant I en fonction de la fréquence pour trois valeurs de R :

$$R_1 = 5 \Omega \quad R_2 = 10 \Omega \quad R_3 = 20 \Omega$$

$$U = 15 \text{ V} \quad L = 50 \text{ mH} \quad C = 50 \mu\text{F}$$

Faire varier la fréquence de 20 à 300 Hz

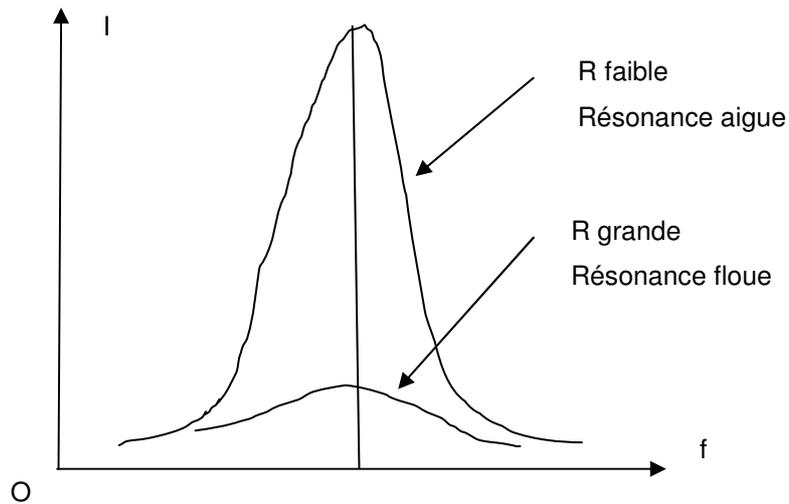
I en fonction de f



.14.7 ACUITE DE LA RESONANCE

Si on augmente R , L et C gardant les mêmes valeurs, I_0 diminue, la courbe de réponse s'aplatit

La résonance, aigue pour R petite, devient floue lorsque R est grande. La valeur de la fréquence de résonance ne dépend pas de R



Plus la résistance est faible, plus l'intensité à la résonance est grande, plus la résonance est aigue, plus le facteur de qualité à la résonance est grand, plus la bande passante (f_2-f_1) est étroite.

.14.8 DANGERS DE LA RESONANCE

Dans un circuit à la résonance, les tensions aux bornes de la bobine et du condensateur peuvent prendre des valeurs très élevées, bien supérieures à la tension d'alimentation d'où les dangers de la résonance en électricité industrielle. Ces dangers sont d'autant plus importants que la résonance est aigue

.14.9 EXERCICE

Un résistor $R = 5 \Omega$, un réactor $L = 0,192 \text{ H}$ et un condensateur de capacité C sont en série.

1. Quelle valeur C faut-il donner à la capacité pour qu'il y ait résonance à la fréquence de 50 Hz?
2. La capacité ayant la valeur C , calculer l'intensité du courant I et la tension entre les bornes de chaque élément si on appliquait au dipôle RLC une tension $U = 110 \text{ V}$, de fréquence 50 Hz.

.14.10 CORRIGE

Dans le cours, la résonance d'intensité était obtenue en faisant varier la fréquence, U , R , L et C étant constants.

Dans cet exercice, la résonance d'intensité est obtenue en faisant varier la capacité du condensateur, fréquence, U, R et L étant constants.

A la résonance, $LC4\pi^2f_0^2=1$ d'où

$$C = \frac{1}{L4\pi^2f_0^2} \quad C = \frac{1}{0,192 \times 4 \times \pi^2 \times 50^2} = 53 \times 10^{-6} \text{ F}$$

$$\text{A la résonance } I_0 = \frac{U}{R} \quad I_0 = \frac{110}{5} = 22 \text{ A} \quad (U_R)_0 = U = 110 \text{ V}$$

$$(U_L)_0 = (U_C)_0 = L\omega_0 I_0 \quad (U_L)_0 = (U_C)_0 = 0,192 \times 2\pi \times 50 \times 22 = 1327 \text{ V}$$

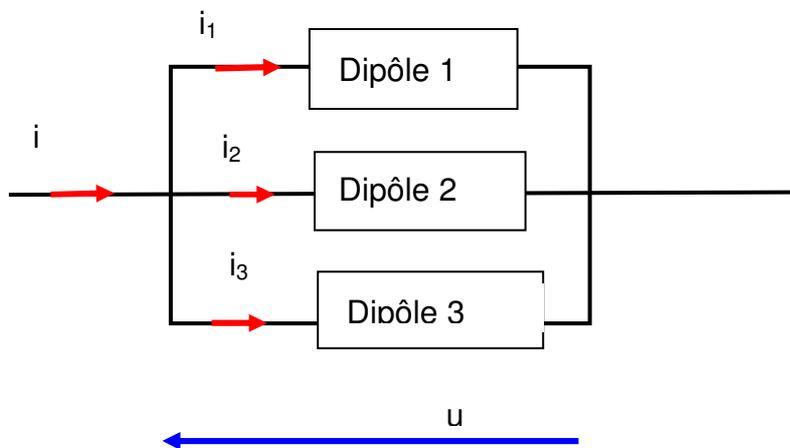
Ce calcul montre les dangers de la résonance : aux bornes du condensateur et de la bobine, les tensions peuvent être nettement plus élevées que la tension fournie par le générateur.

Corrigé de l'exercice

.CHAPITRE 15 ASSOCIATIONS DE DIPOLES EN PARALLELE EN REGIME SINUSOIDAL. -. RESOLUTION PAR LA CONSTRUCTION DE FRESNEL

.15.1 ASSOCIATION DE DIPOLES EN PARALLELE

Trois dipôles sont montés en dérivation :



A chaque instant on peut écrire : $i = i_1 + i_2 + i_3$

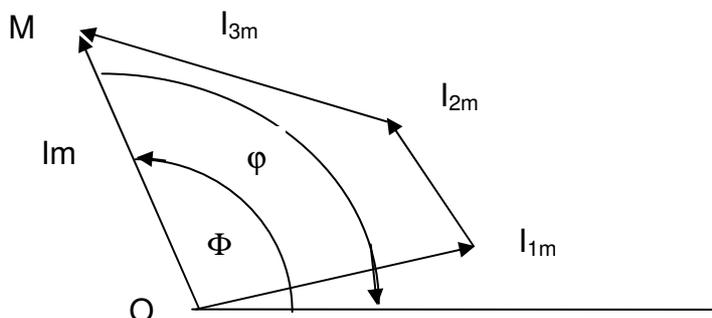
Si $u = U_m \cos(\omega t)$ $i_1 = I_{1m} \cos(\omega t + \varphi_1)$ $i_2 = I_{2m} \cos(\omega t + \varphi_2)$

$i_3 = I_{3m} \cos(\omega t + \varphi_3)$

Dans ce cas $i = I_m \cos(\omega t + \Phi)$

Si on associe à i_1 le vecteur \overline{OM}_1 , à i_2 le vecteur \overline{OM}_2 , à i_3 le vecteur \overline{OM}_3 ,

à l'intensité i est associé le vecteur \overline{OM} tel que $\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3$



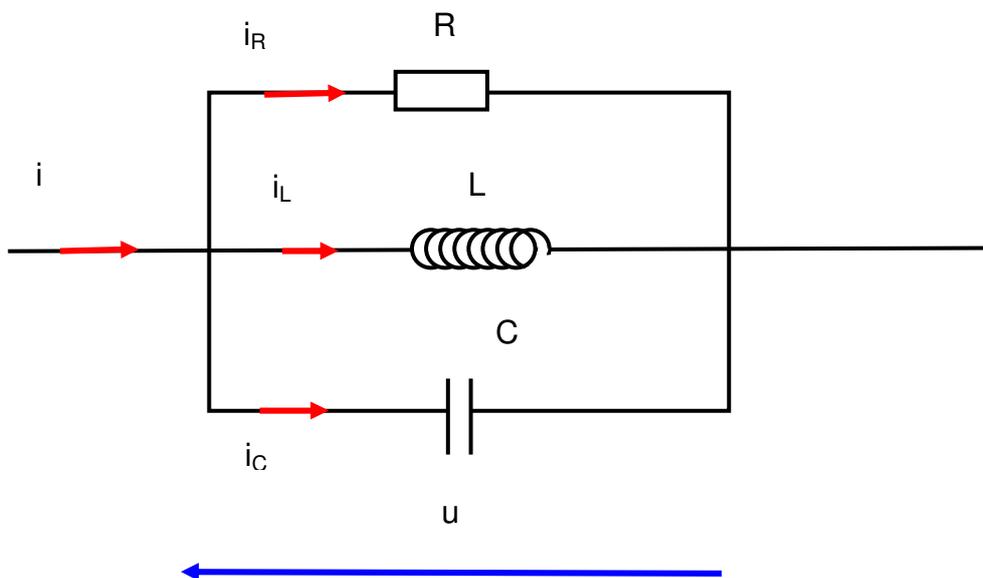
Φ est ici le déphasage de i par rapport à u . $\Phi = (\vec{U}, \vec{I}) = \varphi_i - \varphi_u = \varphi_i$

φ est le déphasage de u par rapport à i $\varphi = (\vec{I}, \vec{U}) = \varphi_u - \varphi_i = -\varphi_i$

On effectue la construction de Fresnel avec les intensités comme on l'avait fait en série avec les tensions.

.15.2 DIPOLE R-L-C PARALLELE

.15.2.1 Schéma



Une résistance pure R , une bobine parfaite et un condensateur parfait sont montés en parallèle.

.15.2.2 Construction de Fresnel

A chaque instant on peut écrire : $i = i_R + i_L + i_C$

Si $u = U_m \cos \omega t$

L'intensité i_R est en phase avec u $Y_R = \frac{1}{R}$

$$i_R = \frac{U_m}{R} \cos \omega t$$

L'intensité i_L est en quadrature retard sur u

$$Y_L = \frac{1}{L\omega} \quad i_L = \frac{U_m}{L\omega} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

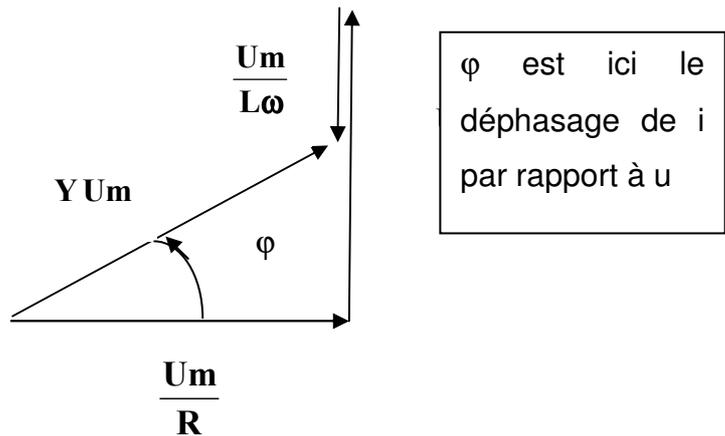
L'intensité i_C est en quadrature avance sur u

$$Y_C = C\omega \quad i_L = U_m C \omega \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

Dans ce cas $i = I_m \cos(\omega t + \varphi)$

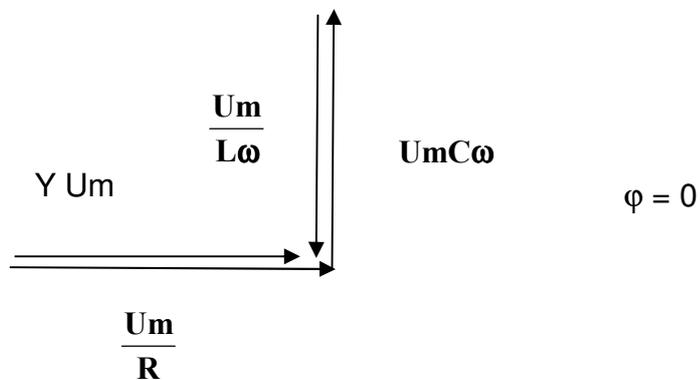
Trois cas sont possibles :

Cas 1 : $C\omega > \frac{1}{L\omega}$

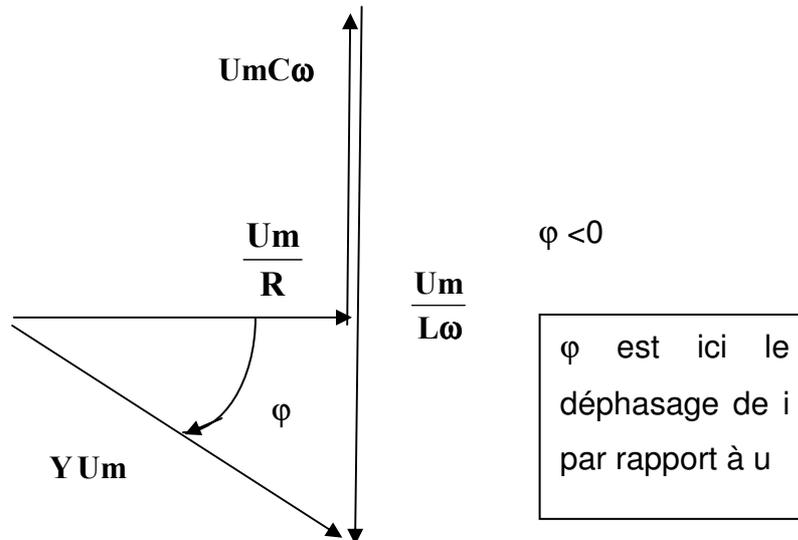


Cas 2 : $C\omega = \frac{1}{L\omega}$

Le circuit est alors antirésonant.



Cas 3 $C\omega < \frac{1}{L\omega}$



.15.2.3 Expressions de Y du dipôle RLC, de I et de φ

Dans les cas 1 et 3, l'application du théorème de Pythagore permet d'écrire :

$$(Y U_m)^2 = \left(\frac{U_m}{R}\right)^2 + \left(U_m C \omega - \frac{U_m}{L \omega}\right)^2 \quad \text{d'où} \quad Y^2 = \left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(C \omega - \frac{1}{L \omega}\right)^2$$

$$Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C \omega - \frac{1}{L \omega}\right)^2}$$

$$I = Y U = U \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C \omega - \frac{1}{L \omega}\right)^2}$$

$$\tan \varphi = \frac{C \omega - \frac{1}{L \omega}}{\frac{1}{R}} = R \left(C \omega - \frac{1}{L \omega}\right) \quad \cos \varphi = \frac{1}{Y} = \frac{1}{R Y}$$

.15.2.4 ACTIVITE

.15.2.4.1 Question

On veut réaliser une étude expérimentale au cours de laquelle R, L et C sont des constantes et f varie.

$$R = 100 \, \Omega \quad L = 50 \, \text{mH} \quad C = 50 \, \mu\text{F}$$

On fait varier la fréquence de 20 à 300 Hz

Est-ce suffisant pour étudier les variations des différentes grandeurs en fonction de la fréquence ?

.15.2.4.2 Réponse :

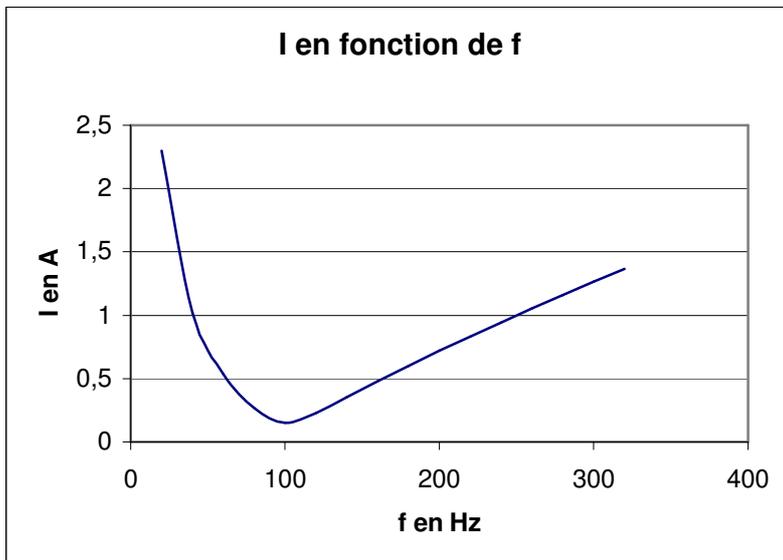
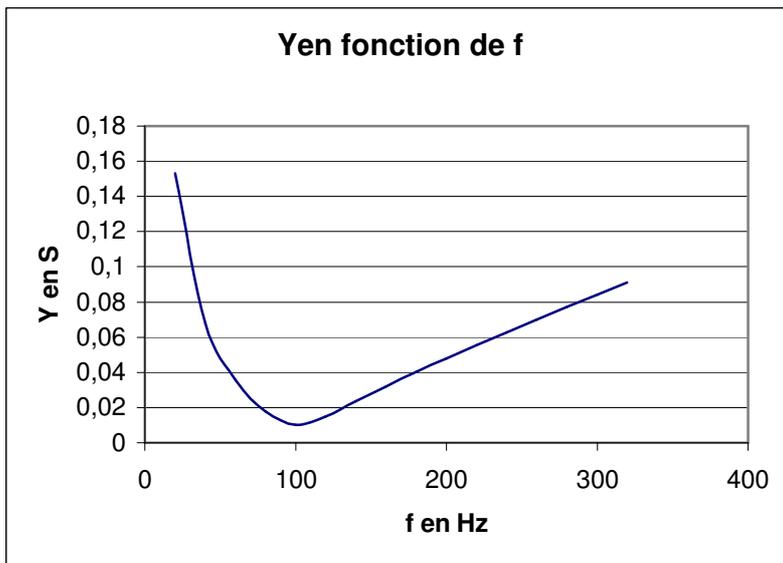
En fait deux études sont possibles : soit U est constante, soit I est constante.

.15.2.4.3 Variation des grandeurs en fonction de la fréquence pour $U = \text{cte}$

$U = 15 \text{ V}$

Etudier Y et I en fonction de f et tracer les courbes correspondantes.

Formuler des conclusions.



Conclusion :

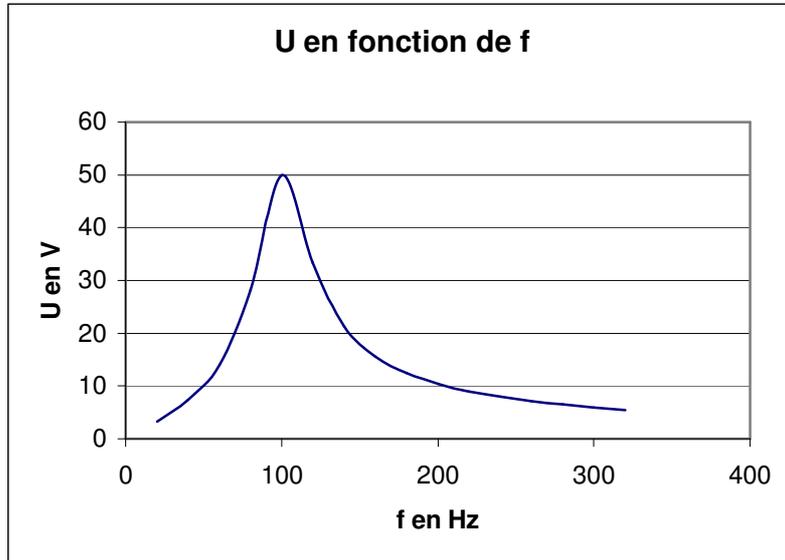
Y et I sont minimales à l'antirésonance pour $U = \text{cte}$

**.15.2.4.4 Variation des grandeurs en fonction de la fréquence
pour $I = \text{cte}$**

$I = 0,5 \text{ A}$

Etudier Y et U en fonction de f et tracer les courbes correspondantes.

Formuler des conclusions.



La courbe de Y en fonction de la fréquence est la même que précédemment.

Conclusion :

Y est minimale et U est maximale à l'antirésonance pour $I = \text{cte}$

.15.2.5 Etude de l'antirésonance

.15.2.5.1 Relations à l'antirésonance

A l'antirésonance $f = f_0$ $\omega = \omega_0$ $C\omega_0 = \frac{1}{L\omega_0}$ $LC\omega_0^2 = 1$

La fréquence à l'antirésonance a même valeur que la fréquence de résonance d'un dipôle RLC série pour les mêmes valeurs de L et de C .

L'admittance est minimale à l'antirésonance : $Y_0 = \frac{1}{R}$

Si $U = \text{cte}$, l'intensité efficace est minimale à l'antirésonance :

$$I_0 = Y_0 U = \frac{U}{R}$$

Si $I = \text{cte}$, la tension efficace est maximale à l'antirésonance :

$$U_0 = \frac{I}{Y_0} = RI$$

A l'antirésonance, i et u sont en phase.

.15.2.5.2 Conclusion

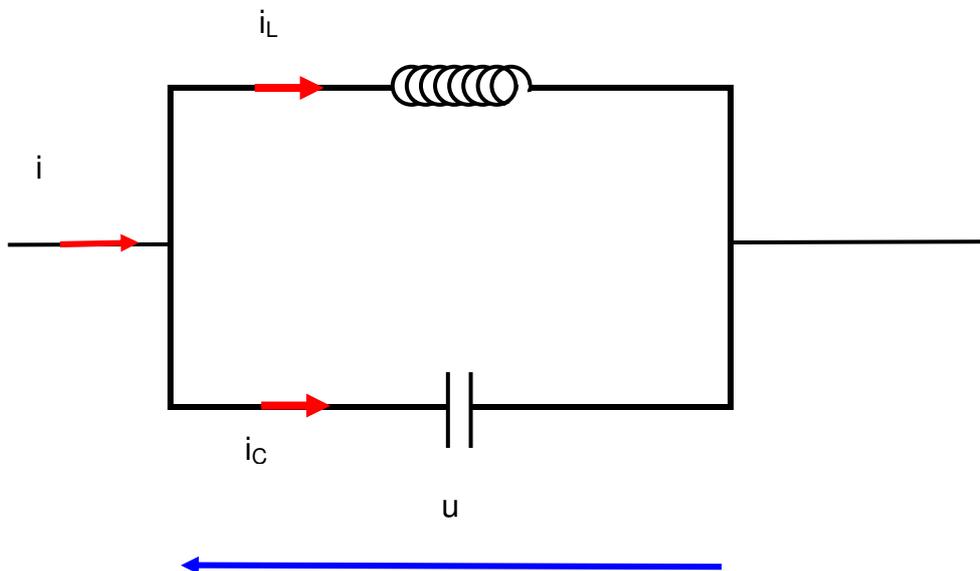
A l'antirésonance, pour $U = \text{constante}$, Y est minimale de même que I .

L'impédance du dipôle RLC est alors maximale pour les signaux de fréquence f_0 .

On comprend qu'un tel circuit peut servir de filtre et être utilisé pour séparer suivant leurs fréquences des signaux.

.15.3 COMMENT FONCTIONNERAIT LE CIRCUIT PARALLELE LC PARFAIT ?

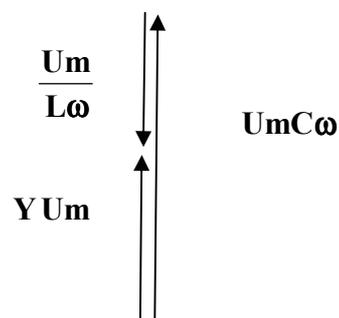
.15.3.1 Schéma



.15.3.2 Construction de Fresnel

Trois cas sont possibles :

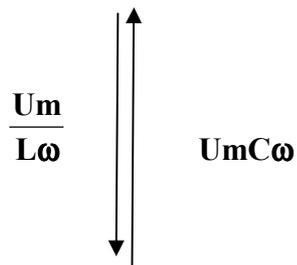
Cas 1 : $C\omega > \frac{1}{L\omega}$



$$I = I_C - I_L$$

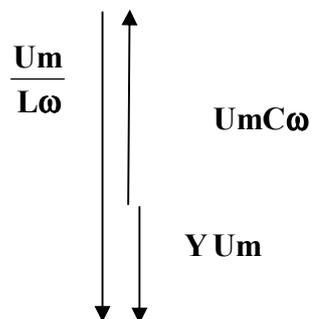
Cas 2 : $C\omega = \frac{1}{L\omega}$

Le circuit est alors antirésonant.



Dans ce cas, à l'antirésonance l'intensité I serait nulle ; on parle donc de circuit bouchon pour la fréquence d'antirésonance

Cas 3 $C\omega < \frac{1}{L\omega}$



.15.3.3 Expressions de Y du dipôle RLC, de I et de φ

$$Y = \left| C\omega - \frac{1}{L\omega} \right|$$

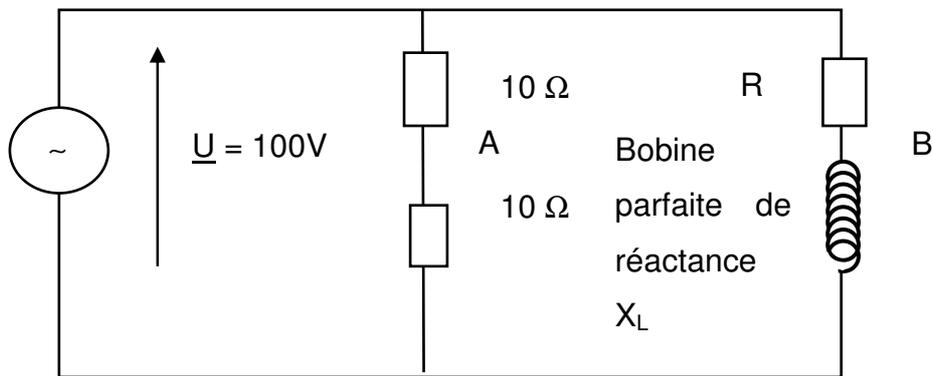
$$I = YU = U \left| C\omega - \frac{1}{L\omega} \right|$$

φ passe de $\frac{\pi}{2}$ à $-\frac{\pi}{2}$ quand on passe du cas 1 au cas 3

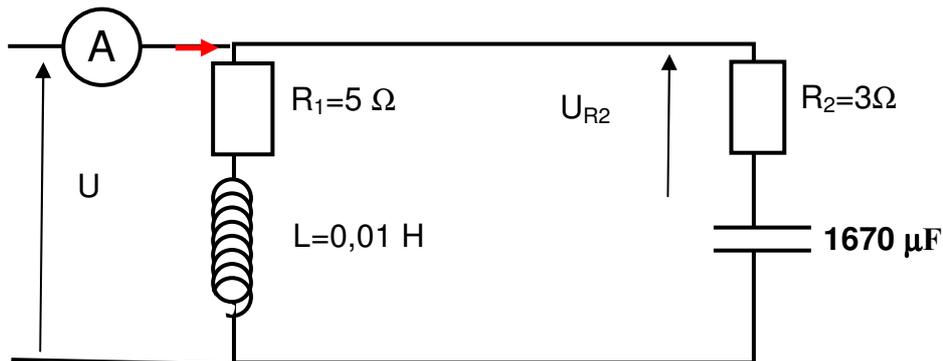
.15.4 EXERCICES

.15.4.1 * Exercice 1

Montrer que pour n'importe quelles valeurs de R et X_L , la valeur efficace de la tension u_{AB} est de 50 V. On utilisera la représentation de Fresnel



.15.4.2 * Exercice 2



Déterminer le déphasage entre u et l'intensité du courant i traversant l'ampèremètre. Calculer I

$$U_{R_2} = 15\ \text{V} \quad \omega = 200\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

.15.5 CORRIGES

.15.5.1 Corrigé de l'exercice 1

$$U_1=U_2 = U / 2 = 100 \text{ V}$$

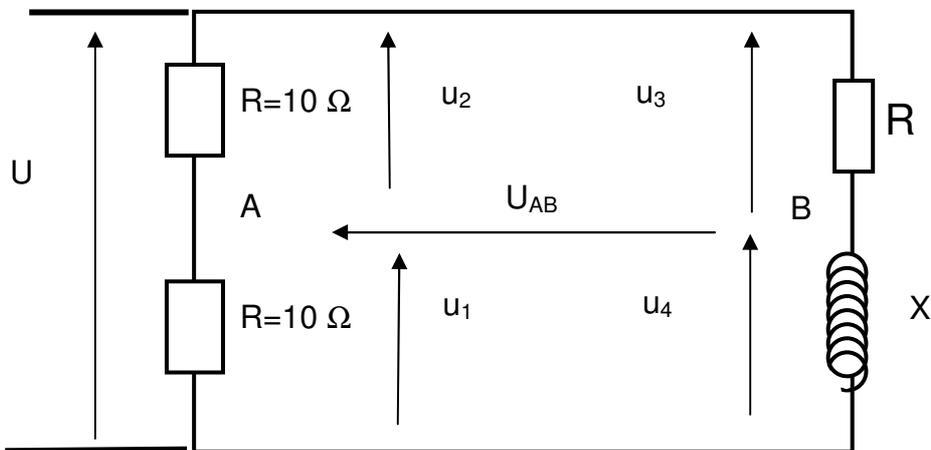
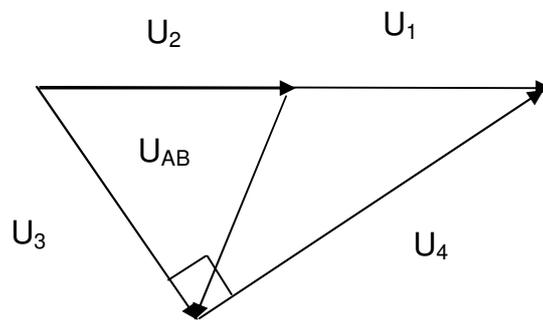
On fait la construction de Fresnel. U est sur l'axe de référence.

$$\vec{U}_{AB} = \vec{U}_1 - \vec{U}_4$$

Le triangle rectangle est inscriptible dans un demi cercle de centre O.

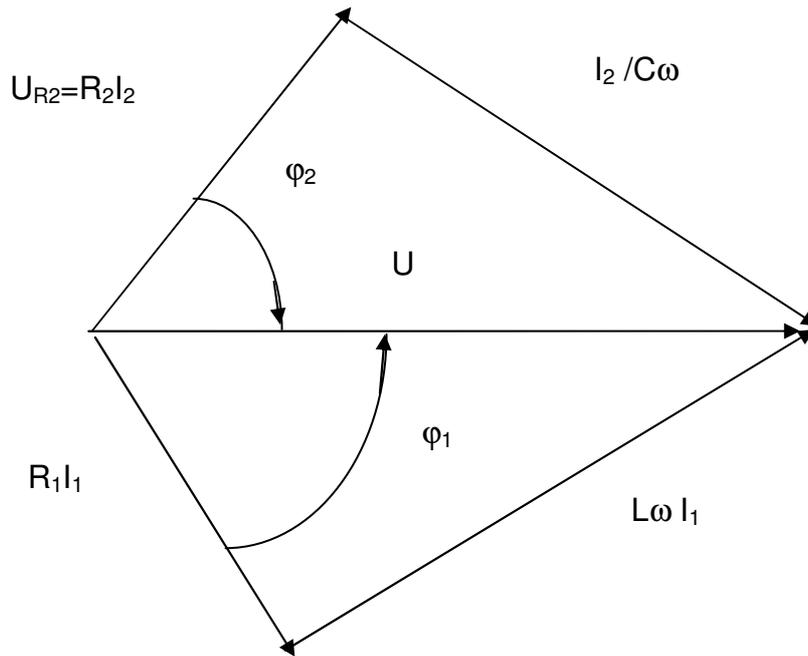
U_{AB} représentée par le rayon du cercle

$$U_{AB}=U_1=U_2 = 50 \text{ V}$$



.15.5.2 Corrigé de l'exercice 2

On prend la tension U sur l'axe de référence. On fait la construction de Fresnel avec les tensions. On détermine φ_1 et φ_2 , déphasages de u par rapport à i_1 et i_2 .



$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + (L\omega)^2} \quad Z_1 = \sqrt{5^2 + (0,01 \times 200)^2} = 5,38 \Omega$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + \frac{1}{C\omega}} \quad Z_2 = \sqrt{3^2 + \left(\frac{1}{1670 \times 10^{-6} \times 200}\right)^2} = 4,24 \Omega$$

$$I_2 = \frac{U_{R2}}{R_2} \quad I_2 = \frac{15}{3} = 5 \text{ A}$$

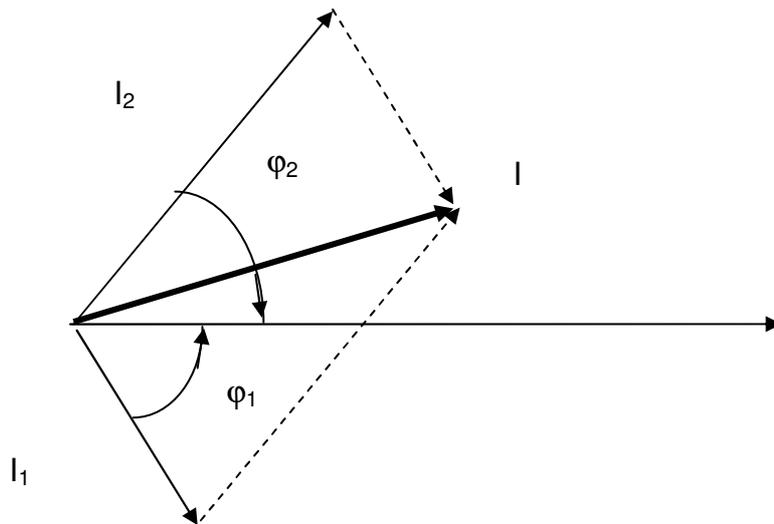
$$U = Z_2 I_2 \quad U = 4,24 \times 5 = 21,2 \text{ V}$$

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} \quad I_1 = \frac{21,2}{5,38} = 3,90 \text{ A}$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{L\omega}{R_1} \quad \tan \varphi_1 = \frac{0,01 \times 200}{5} \quad \varphi_1 = 21,8^\circ$$

$$\tan \varphi_2 = -\frac{1}{R_2 C \omega} \quad \tan \varphi_2 = -\frac{1}{3 \times 1670 \times 10^{-6} \times 200} \quad \varphi_2 = -44,9^\circ$$

On fait ensuite la construction de Fresnel pour les intensités



$$I = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \cos(|\varphi_2| + \varphi_1)}$$

$$I = 7,46 \text{ A}$$

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \quad I \cos \varphi = I_1 \cos \varphi_1 + I_2 \cos \varphi_2$$

$$\cos \varphi = \frac{3,9 \cos(21,8) + 5 \cos(-44,9)}{7,46} = 0,959 \quad \varphi = 16,3^\circ$$

I fait avec U un angle $\varphi = -16,3^\circ$ (déphasage de u sur i)

.CHAPITRE 16 UTILISATION DES NOMBRES COMPLEXES

.16.1 INTRODUCTION.

Dans le plan orthonormé complexe, un vecteur peut s'écrire sous la forme

$$\vec{v} = \mathbf{a} + j\mathbf{b}$$

La grandeur sinusoïdale u , représentée par un vecteur de Fresnel tournant avec la vitesse angulaire ω et faisant avec l'axe de référence à la date t l'angle $\omega t + \varphi_u$, pourra s'écrire sous la forme complexe :

$$\underline{u} = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) + jU_m \sin(\omega t + \varphi_u) = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

Comme dans la représentation de Fresnel où le vecteur est représenté à la date $t=0$, on pourra avec les complexes travailler à $t=0$, c'est-à-dire n'utiliser que le complexe $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$ appelé amplitude complexe.

.16.2 TENSION ET TENSION COMPLEXES.

La valeur instantanée complexe de u est :

$$\underline{u} = U_m e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U \sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi_u)}$$

L'amplitude complexe de u est:

$$\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi_u}$$

La valeur efficace complexe est:

$$\underline{U} = U e^{j\varphi_u}$$

La valeur instantanée complexe de i est :

$$\underline{i} = I_m e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I \sqrt{2} e^{j(\omega t + \varphi_i)}$$

L'amplitude complexe de i est:

$$\underline{I}_m = I_m e^{j\varphi_i}$$

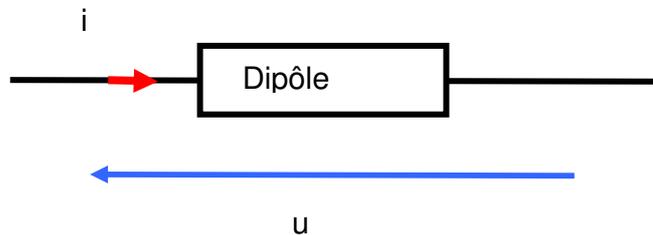
La valeur efficace complexe de i est:

$$\underline{I} = I e^{j\varphi_i}$$

Les valeurs instantanées u et i sont les parties réelles de \underline{u} et de \underline{i}

.16.3 DEFINITION DE L'IMPEDANCE COMPLEXE

u et i sont deux grandeurs sinusoïdales : $u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$ et $i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$.



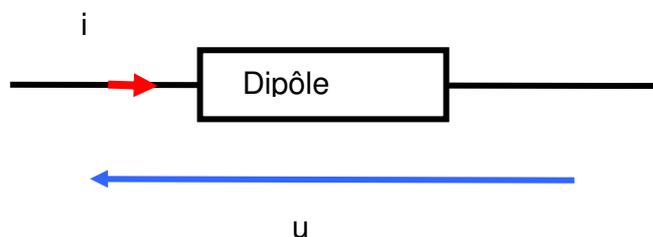
On considère $\underline{u} = U_m e^{j\varphi_u} e^{j\omega t}$ et $\underline{i} = I_m e^{j\varphi_i} e^{j\omega t}$

On définit l'impédance complexe du dipôle :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U_m e^{j\varphi_u}}{I_m e^{j\varphi_i}} = \frac{U_m}{I_m} e^{j(\varphi_u - \varphi_i)} = Z e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$Z = |\underline{Z}| \quad \text{Arg}(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i$$

.16.4 LOI D'OHM COMPLEXE



La loi d'Ohm complexe s'écrit :

$\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$ lorsqu'on utilise les valeurs instantanées complexes ou $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$

lorsqu'on utilise les valeurs efficaces complexes.

$$\underline{U} = \underline{Z} \underline{I} \Rightarrow U = Z I$$

$$\Rightarrow \text{Arg}(\underline{U}) = \text{Arg}(\underline{Z}) + \text{Arg}(\underline{I})$$

(\vec{I}, \vec{U}) est l'angle dont il faut tourner le vecteur I pour l'amener sur le vecteur U

$(\vec{I}, \vec{U}) = \varphi_u - \varphi_i =$ déphasage de u par rapport à i

Appelons φ ce déphasage

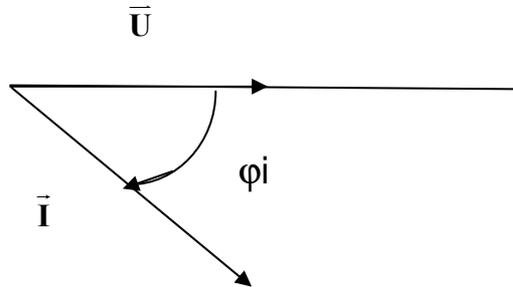
CONSEQUENCES

$$\text{Arg}(\underline{U}) = \text{Arg}(\underline{Z}) + \text{Arg}(\underline{I})$$

Cas particulier 1

Si $\varphi_u = 0$ alors $0 = \text{Arg}(\underline{Z}) + \varphi_i$ d'où $\text{Arg}(\underline{Z}) = -\varphi_i$

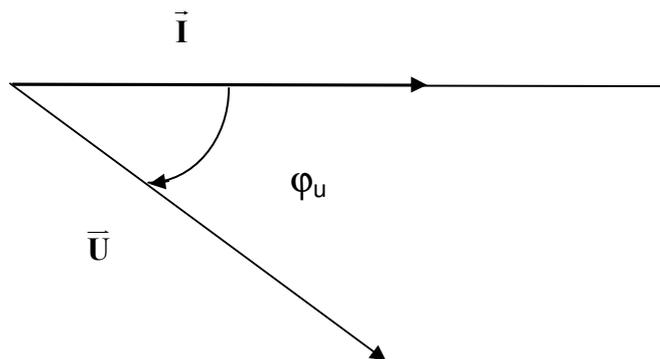
$$\text{Arg}(\underline{Z}) = -\varphi_i = -(\varphi_u - \varphi) = -(0 - \varphi) = \varphi$$



Cas particulier 2

Si $\varphi_i = 0$ alors $\text{Arg}(\underline{U}) = \text{Arg}(\underline{Z}) + 0$ d'où $\text{Arg}(\underline{Z}) = \varphi_u$

$$\text{Arg}(\underline{Z}) = \varphi_u = \varphi_i + \varphi = 0 + \varphi = \varphi$$



Conclusion :

Dans les deux cas $\text{Arg}(\underline{Z}) = +\varphi$

□ Exercice 1

.16.5 IMPEDANCES COMPLEXES DE DIPOLES ELEMENTAIRES.

.16.5.1 Définitions.

L'impédance complexe d'un dipôle peut s'écrire $\underline{Z} = R + jX$

$$Z^2 = R^2 + X^2 \quad \text{Arg}(\underline{Z}) = \text{Arctan}(X/R)$$

Z est l'impédance R est la résistance X est la Réactance

Z, R et X s'expriment en Ω

Rappel des résultats obtenus précédemment

si $i = I_m \cos \omega t$ et $u = U_m \cos (\omega t + \varphi_u)$

Dipôle	Valeur de Z	φ
Résistance pure	R	0
Bobine parfaite	$L\omega$	$\pi / 2$
Condensateur parfait	$\frac{1}{C\omega}$	$-\pi / 2$

On lit les valeurs de Z et de φ dans le tableau et on écrit l'impédance complexe : $\underline{Z} = Z \angle \varphi$

.16.5.2 Expressions des impédances complexes

Dipôle	\underline{Z}	R	X	Z	Argument
Résistance pure	R	R	0	R	0
Bobine parfaite	$jL\omega$	0	$L\omega$	$L\omega$	$\pi / 2$
Condensateur parfait	$-j \frac{1}{C\omega} = \frac{1}{jC\omega}$	0	$-\frac{1}{C\omega}$	$\frac{1}{C\omega}$	$-\pi / 2$

.16.6 ADMITTANCES COMPLEXES DE DIPOLES ELEMENTAIRES.

.16.6.1 Définitions.

L'admittance complexe d'un dipôle est $\underline{Y} = 1 / \underline{Z}$ $\underline{Y} = G + j B$

$$Y^2 = G^2 + B^2 \quad \text{Arg}(Y) = \text{Arctan}(B/G)$$

Y est admittance G est la conductance B est la susceptance

Y, G et B en S (siemens)

.16.6.2 Expressions des admittances complexes

On utilise la relation $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$

Dipôle	\underline{Y}	G	B	\underline{Y}	Argu men t
Résista nce pure	$\frac{1}{R}$	$\frac{1}{R}$	0	$\frac{1}{R}$	0
Bobine parfaite	$\frac{1}{jL\omega}$	0	$-\frac{1}{L\omega}$	$\frac{1}{L\omega}$	$-\pi/2$
Conden sateur parfait	$jC\omega$	0	$C\omega$	$C\omega$	$\pi/2$

.16.7 ASSOCIATION DE DIPOLES EN SERIE

En série $u = u_1 + u_2 + u_3$ se traduira par: $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3$

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3$$

Dipôle	\underline{Z}	R	X	Z
RL série	$R + jL\omega$	R	$L\omega$	$\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$
RC série	$R - j\frac{1}{C\omega}$	R	$-\frac{1}{C\omega}$	$\sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}}$
RLC série	$R + jL\omega - j\frac{1}{C\omega}$	R	$L\omega - \frac{1}{C\omega}$	$\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$

□ Exercice 2

.16.8 ASSOCIATION DE DIPOLES EN PARALLELE

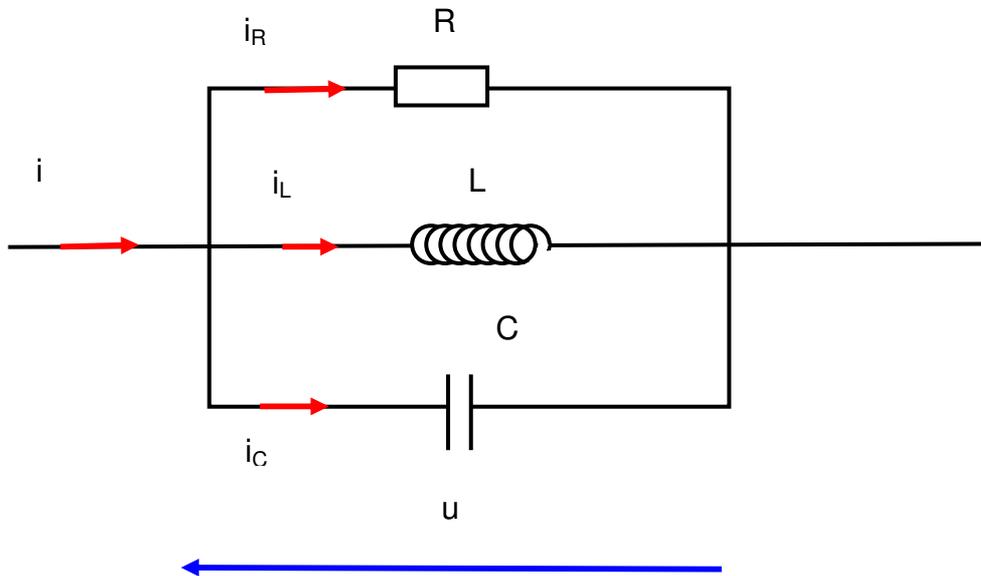
En parallèle $i = i_1 + i_2 + i_3$ se traduira par $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$$

□ Exercice 3

.16.9 ETUDE DU DIPOLE RLC PARALLELE

.16.9.1 Schéma



.16.9.2 Admittance équivalente

$$\underline{Y} = \underline{Y}_R + \underline{Y}_L + \underline{Y}_C \quad \underline{Y} = \frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

$$\text{Arg}(\underline{Y}) = \arctan R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) \quad Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$$

.16.9.3 Antirésonance parallèle

On maintient U constante, on fait varier f et on mesure I

Pour ω_0 telle que $C\omega_0 - \frac{1}{L\omega_0} = 0$ l'antirésonance est atteinte:

$$Y \text{ est alors minimale } Y = Y_0 = \frac{1}{R}$$

L'intensité à la résonance $I = I_0$ est minimale si le dipôle est soumis à une tension de valeur constante U

$$I_0 = Y_0 U = U/R$$

$$LC\omega_0^2 = 1$$

Et i et u sont en phase

.16.9.4 Circuit bouchon

On parle de circuit bouchon car, pour $f=f_0$, l'intensité est minimale quelle que soit la tension. Dans le cas idéal où la bobine et le condensateur seraient parfaits et avec $R=0$, l'intensité serait nulle à l'antirésonance d'où le terme « circuit bouchon ».

.16.10 EXERCICES

Les calculs avec les nombres complexes peuvent être effectués avec une calculatrice.

□ Exercice 1

Un dipôle, alimenté sous une tension $u = 311 \cos \omega t$ est parcouru par un courant

$$d'intensité \mathbf{i} = 3 \cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$$

Donner les expressions de \underline{U} et de \underline{I} .

Quelle est l'impédance du dipôle ?

Quel est le déphasage de u par rapport à i ?

□ Exercice 2

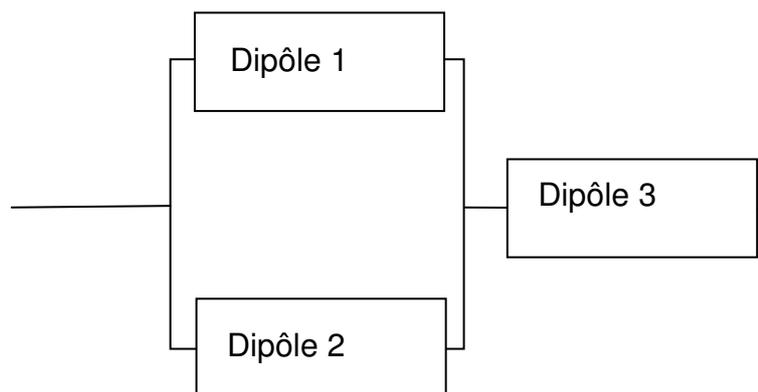
Trois dipôles sont associés en série ; leurs impédances sont :

$$\underline{Z}_1 = 2 + 3j \quad \underline{Z}_2 = 1 - j \quad \underline{Z}_3 = 3\Omega \angle 20^\circ$$

Quelle est l'impédance de l'association série ?

□ Exercice 3

Quelle est l'impédance du dipôle suivant ?



$$\underline{Z}_1 = 2 + 3j \quad \underline{Z}_2 = 1 - j \quad \underline{Z}_3 = 3\Omega \angle 20^\circ$$

$$\underline{Z} = 4,13 + 0,49j$$

.16.10.1 * Exercice 4

Etablir l'expression de l'intensité du courant dans le cas d'un dipôle formé par l'association en parallèle d'un condensateur de capacité C et d'une bobine de résistance r et d'inductance L en fonction de U , L , C , r et ω .

Déterminer l'expression de la fréquence à l'antirésonance

.16.10.2 * Exercice 5

Deux récepteurs sont branchés en série sous une tension sinusoïdale de valeur efficace $U = 240$ V et de fréquence 50 Hz.

Le premier récepteur est une bobine de résistance R_1 et d'inductance L .

Le deuxième récepteur est constitué d'une résistance R_2 en série avec un condensateur de capacité C

La réactance de la bobine vaut 50Ω et celle du condensateur 150Ω .

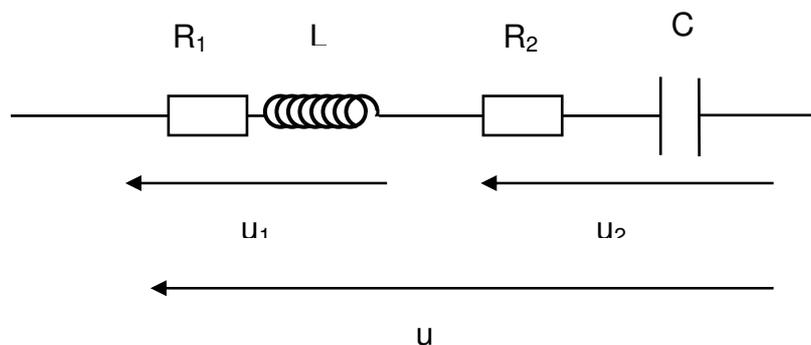
Calculer L et C

Déterminer la valeur de l'intensité I du courant

Déterminer les déphasages entre u_1 et i et entre u_2 et i

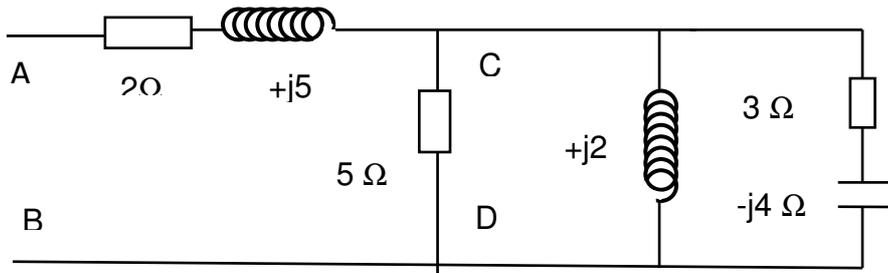
Quel est le déphasage de u_2 par rapport à u_1 ?

$$R_1 = 50 \Omega \quad R_2 = 100 \Omega$$



.16.10.3 * Exercice 6

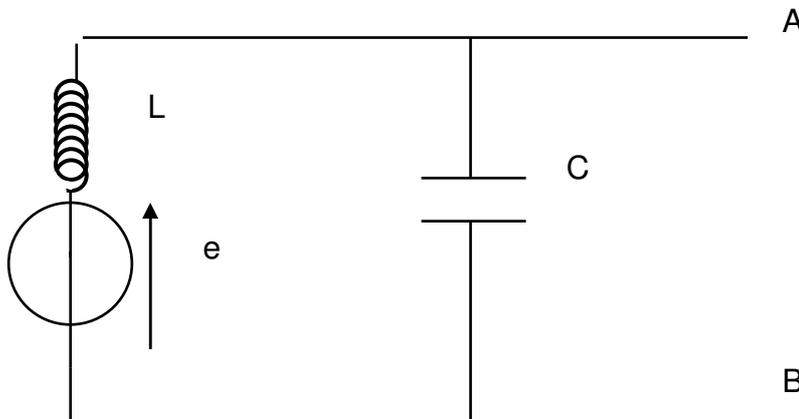
Déterminer l'impédance complexe \underline{Z}_{AB} et l'admittance complexe \underline{Y}_{AB} du dipôle AB



.16.10.4 * Exercice 7

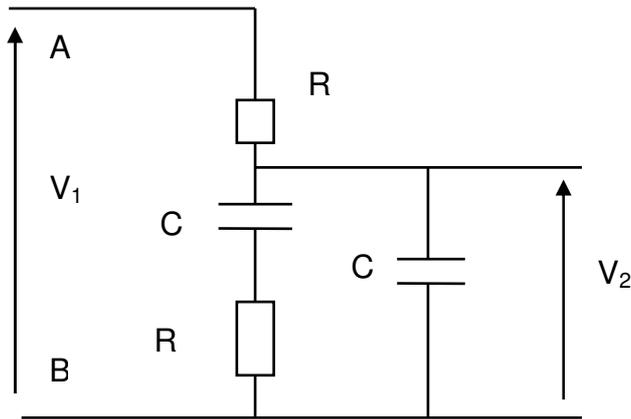
Le générateur a une force électromotrice de valeur efficace $E = 240 \text{ V}$ et fournit une tension sinusoïdale de fréquence 50 Hz . La réactance de la bobine vaut 50Ω et celle du condensateur 150Ω .

Déterminer les caractéristiques U_0 et Z_0 du dipôle de Thévenin équivalent au dipôle AB. On prendra comme référence U_0 (argument nul)
On branche entre A et B un récepteur d'impédance $Z = 5 + 4j$. Déterminer I et la valeur efficace I de l'intensité du courant circulant dans ce récepteur



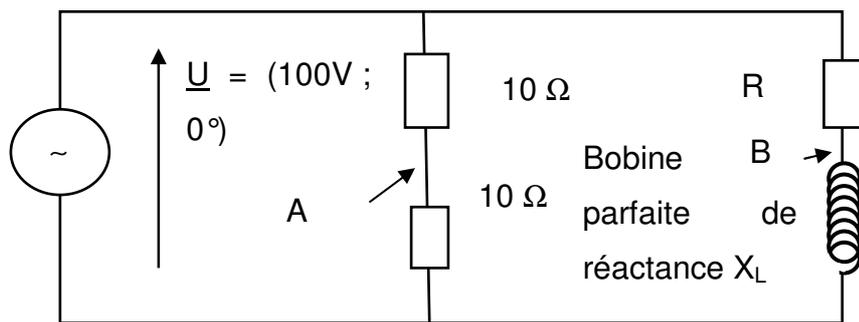
.16.10.5 * Exercice 8

On applique entre A et B une tension sinusoïdale V_1 de pulsation ω .
Exprimer V_2 / V_1 en fonction de $x = RC\omega$.



.16.10.6 * Exercice 9

Montrer que pour n'importe quelles valeurs de R et X_L , la valeur efficace de la tension u_{AB} est de 50 V. On utilisera la représentation de Fresnel



.16.10.7 * Exercice 10

Les deux récepteurs R_1 et R_2 de l'exercice 2 sont maintenant branchés en parallèle sous une tension $U = (240 \text{ V} ; 0^\circ)$

Déterminer l'impédance complexe du groupement

Déterminer les valeurs complexes des intensités des courants

.16.11 CORRIGES DES EXERCICES

.16.11.1 Corrigé de l'exercice 1

$$U = \frac{311}{\sqrt{2}} = 220\text{V} \quad \underline{U} = 220\text{V} \angle 0^\circ$$

$$\underline{I} = \frac{3}{\sqrt{2}} = 2,12 \text{ A} \quad \underline{I} = 2,12 \text{ A} \angle -60^\circ$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \quad \underline{Z} = \frac{220}{2,12 \angle -60^\circ} = 103,8 \Omega \angle 60^\circ = 51,9 + 89,9j$$

Le déphasage de u par rapport à i est de + 60°

.16.11.2 Corrigé de l'exercice 2

$$\underline{Z}_3 = 2,82 + 1,03j$$

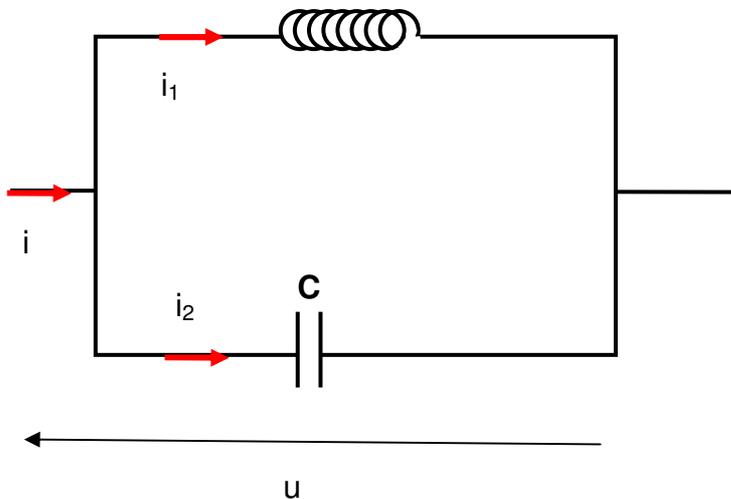
$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \quad \underline{Z} = (2 + 1 + 2,82) + (3 - 1 + 1,03)j = 5,82 + 2,85j$$

$$\underline{Z} = 6,48 \Omega \angle 26,1^\circ$$

.16.11.3 Corrigé de l'exercice 3

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} + \underline{Z}_3 = \frac{(2 + 3j)(1 - j)}{(2 + 3j) + (1 - j)} + 2,82 + 1,03j$$

.16.11.4 Corrigé de l'exercice 4



$$\underline{Z}_1 = r + jL\omega \quad \underline{Y}_1 = jC\omega$$

$$\underline{Y} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{r + jL\omega} + jC\omega = \frac{r - jL\omega}{r^2 + L^2\omega^2} + jC\omega$$

$$\underline{Y} = \frac{r - jL\omega + jC\omega(r^2 + L^2\omega^2)}{r^2 + L^2\omega^2} = \frac{r + j(C\omega(r^2 + L^2\omega^2) - L\omega)}{r^2 + L^2\omega^2}$$

$$\underline{I} = \underline{Y}\underline{U} \quad \text{si } \underline{U} = U$$

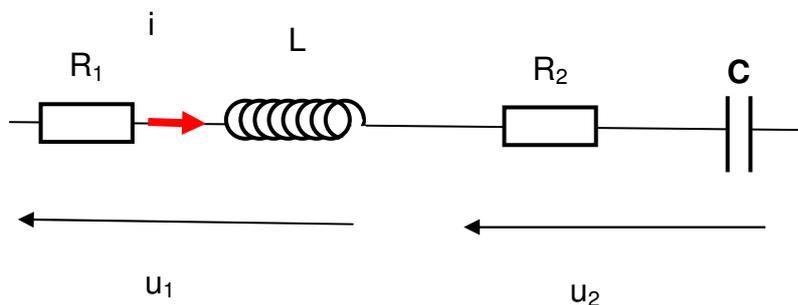
$$\underline{I} = \underline{U} = U \frac{r + j(C\omega(r^2 + L^2\omega^2) - L\omega)}{r^2 + L^2\omega^2}$$

$$\text{D'où } I = \frac{U}{r^2 + L^2\omega^2} \sqrt{r^2 + (C\omega(r^2 + L^2\omega^2) - L\omega)^2}$$

$$I = \frac{U}{r^2 + L^2\omega^2} \sqrt{r^2 + [C\omega r^2 + (LC\omega^2 - 1)^2]}$$

I est minimale pour $LC\omega^2 = 1$

.16.11.5 Corrigé de l'exercice 5



$$L\omega = 50 \quad L = \frac{50}{2\pi 50} = 0,16 \text{ H}$$

$$\frac{1}{C\omega} = 150 \quad C = \frac{1}{150 \times 2\pi \times 50} = 21,2 \times 10^{-6} \text{ F}$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}}{50 + 100 + j(50 - 150)} \quad \underline{U} = 240 \angle 0^\circ$$

$$\underline{I} = \frac{240}{150 - 100j} = 1,11 + 0,738j$$

$$\underline{Z}_1 = 50 + 50j \quad \text{Arg}(\underline{Z}_1) = \varphi_1 \quad \varphi_1 = 45^\circ$$

$$\underline{Z}_2 = 100 - 150j \quad \text{Arg}(\underline{Z}_2) = \varphi_2 \quad \varphi_2 = -56,3^\circ$$

$$\underline{Z} = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \quad \underline{Z} = \sqrt{(50 + 100)^2 + (50 - 150)^2} = 180,3 \Omega$$

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \quad \underline{I} = \frac{240}{180,3} = 1,33 \text{ A} \quad \underline{I} = 1,33 \text{ A} \angle 33,8^\circ$$

φ_1 est le déphasage de u_1 par rapport à i u_1 est en avance de phase sur i

φ_2 est le déphasage de u_2 par rapport à i u_2 est en retard de phase sur i

De déphasage de u_2 par rapport à u_1 est :

$$(\overline{U_1}, \overline{U_2}) = \varphi_2 - \varphi_1 = -56,3 - 45 = -101,3^\circ$$

u_2 est en retard de phase sur u_1 de $101,3^\circ$

.16.11.6 Corrigé de l'exercice 6

Calcul de l'impédance équivalente aux trois dipôles placés en parallèle entre C et D

$$\frac{1}{\underline{Z}_{CD}} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2j} + \frac{1}{3-4j} \Rightarrow \underline{Z}_{CD} = \frac{25}{8-8,5j}$$

$$\underline{Z}_{AB} = \underline{Z}_{AC} + \underline{Z}_{CD} = 2 + 5j + \frac{25}{8-8,5j} = 3,47 + 6,56j$$

$$\underline{Z}_{AB} = 7,41\Omega \angle 62,1^\circ \quad \underline{Y}_{AB} = 0,134S \angle -62,1^\circ$$

$$\underline{Y}_{AB} = 0,063 - 0,119j$$

.16.11.7 Corrigé de l'exercice 7

On remplace le dipôle AB par un dipôle de Thévenin.

Par application de la loi de Pouillet :

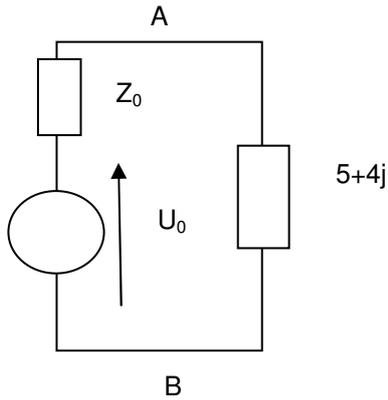
$$\underline{I} = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} \quad \underline{U}_{AB} = \underline{Z}_C \underline{I} \quad \underline{U}_{AB} = \frac{1}{jC\omega} \frac{\underline{E}}{jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{E}}{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)C\omega} \quad \text{d'où} \quad \underline{U}_{AB} = \frac{\underline{E}}{\left(\frac{1}{C\omega} - L\omega\right)C\omega} = 360 \text{ V}$$

$$\underline{U}_0 = 360 \text{ V} \angle 0^\circ$$

$$\underline{Z}_0 = \frac{\underline{Z}_C \underline{Z}_L}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L} = \frac{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = 75j$$

2.

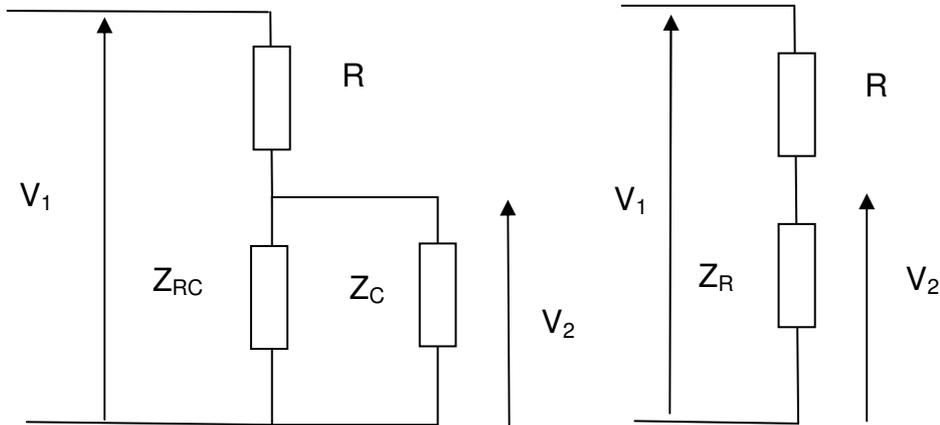


$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_0 + \underline{Z}} = \frac{360}{75j + 5 + 4j}$$

$$\underline{I} = 0,287 - 4,54j$$

$$I = \sqrt{0,287^2 + (-4,54)^2} = 4,55 \text{ A}$$

.16.11.8 Corrigé de l'exercice 8



$$\underline{Z}_{RC} = R + \frac{1}{jC\omega}$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_{RC} \underline{Z}}{\underline{Z}_{RC} + \underline{Z}}$$

D'après la relation du diviseur de tension :

$$\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + R}$$

$$\frac{\underline{V}_2}{\underline{V}_1} = \frac{1 + jx}{1 + 3jx - x^2}$$

.16.11.9 Corrigé de l'exercice 9

$$\underline{U} = 100 \text{ V}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{10 + 10} = 5 \text{ A}$$

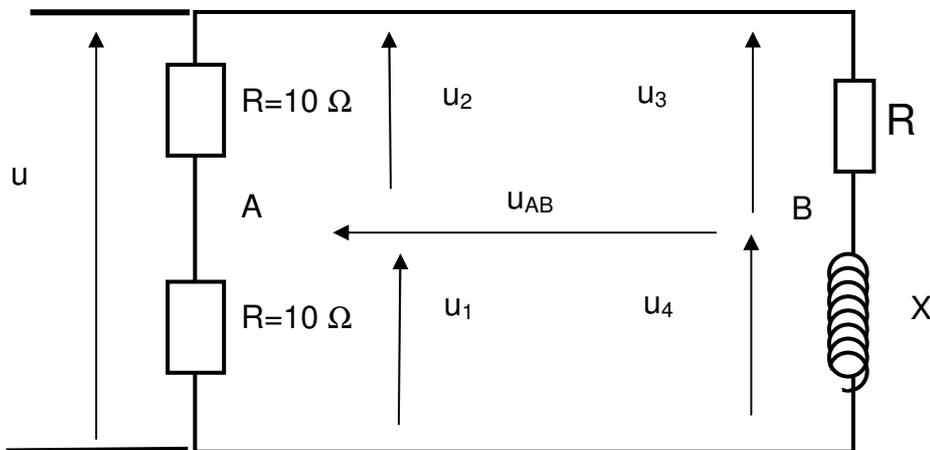
$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{100}{R + jX}$$

$$\underline{U}_{AB} = \underline{U}_{AM} + \underline{U}_{MB} = \underline{U}_{AM} - \underline{U}_{BM}$$

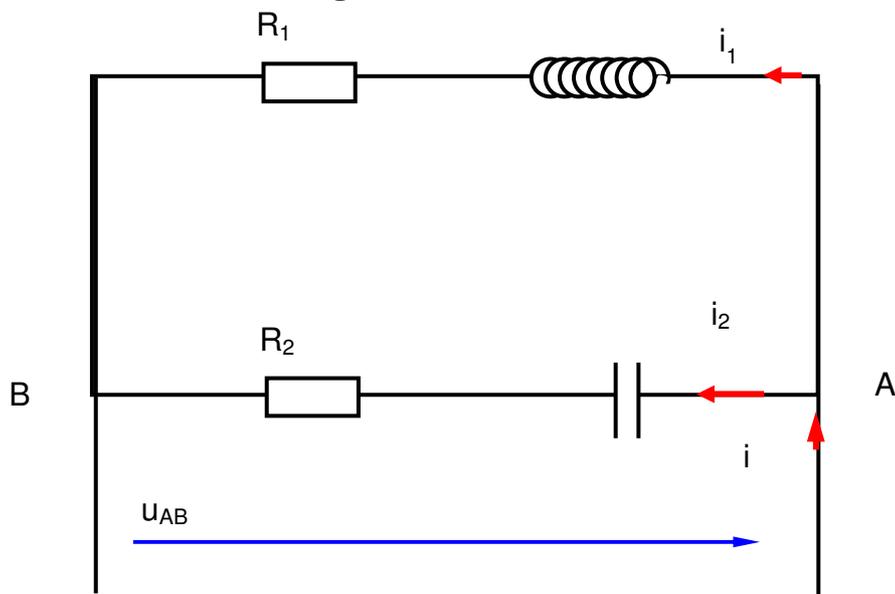
$$\underline{U}_{AB} = 10 \underline{I}_1 - jX \underline{I}_2$$

$$\underline{U}_{AB} = 10 \times 5 - jX \frac{100}{R + jX} = \frac{50(R + jX) - 100jX}{R + jX} = \frac{50(R - jX)}{R + jX}$$

Donc $U_{AB} = 50V$



.16.11.10 Corrigé de l'exercice 10



$$\underline{Z}_1 = 50 + 50j \quad \underline{Z}_2 = 100 - 150j$$

$$\underline{Y}_{AB} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 = \frac{1}{R_1 + jL\omega} + \frac{1}{R_2 + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\underline{Y}_{AB} = \frac{1}{50 + 50j} + \frac{1}{100 - 150j} = 0,013 - 5,38 \times 10^{-3}j$$

$$\underline{U}_{AB} = 240 \angle 0^\circ$$

$$\underline{I} = \underline{Y}_{AB} \underline{U}_{AB} = 4,50 - 1,6j$$

Par application de la relation du diviseur d'intensité

$$\underline{I}_1 = \underline{I} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad \underline{I}_1 = \frac{(4,5 - 1,6j)(100 - 150j)}{150 - 100j} = 3,54 - 3,21j$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \quad \underline{I}_2 = \frac{(4,5 - 1,6j)(50 + 50j)}{150 - 100j} = 0,96 + 1,61j$$

.CHAPITRE 17 PUISSANCES EN REGIME SINUSOIDAL

.17.1 PUISSANCES EN MONOPHASE

Un dipôle, alimenté sous une tension u sinusoïdale u est parcouru par un courant d'intensité i

$$\text{Si } i = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \quad u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$$

.17.1.1 Puissance instantanée

La puissance instantanée a pour expression : $p = ui$

Elle est positive pour un récepteur, négative pour un générateur.

$$p = U_m \cos(\omega t + \varphi_u) I_m \cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$p = 0,5 U_m I_m [\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i)]$$

$$p = 0,5 U \sqrt{2} I \sqrt{2} [\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i)]$$

$$p = U I [\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i)]$$

.17.1.2 Puissance moyenne.

C'est la puissance moyenne calculée sur une période ; elle représente la puissance active consommée.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T U I [\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) + \cos(\varphi_u - \varphi_i)] dt$$

$$P = \frac{UI}{T} \left(\left[\frac{\sin(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)}{2\omega} \right]_0^T + [\cos(\varphi_u - \varphi_i) t]_0^T \right)$$

si $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ déphasage de u par rapport à i

$$P = \frac{UI}{T} (0 + \cos \varphi T) = UI \cos \varphi$$

$$P = U I \cos \varphi$$

.17.1.3 Expressions des différentes puissances

Puissance moyenne (puissance active): $P = U.I.\cos\varphi$

I en A U en V P en W

Puissance réactive : $Q = U.I.\sin\varphi$

I en A U en V Q en VAR

Puissance apparente : $S = U.I$

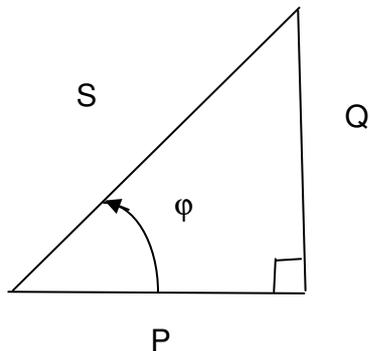
I en A U en V S en V.A

Relations entre les puissances

$$P = S \cos \varphi \quad Q = S \sin \varphi \quad \frac{Q}{P} = \tan \varphi \quad P^2 + Q^2 = S^2$$

Exercice 1

Triangle des puissances



.17.1.4 Puissances mises en jeu dans un dipôle

avec les conventions suivantes : $i = I_m \cos(\omega t)$ $u = U_m \cos(\omega t + \varphi_u)$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_u$$

Dipôle	φ	$\cos \varphi$	P	Q	S
R	0	1	$=UI$ $=R I^2$	0	$=UI$ $=R I^2$
L	$\frac{\pi}{2}$	0	0	$=U I \sin \frac{\pi}{2}$ $=L \omega I \cdot I$ $= L \omega I^2$	0
C	$-\frac{\pi}{2}$	0	0	$U I \sin(-\frac{\pi}{2}) =$ $-UI = -\frac{I}{C \omega} I =$ $-UUC \omega =$ $- U^2 C \omega$	0

RLC série	φ	$\frac{R}{Z}$	$UI \cos \varphi$ $= UI \frac{R}{Z}$ $= ZI \frac{R}{Z}$ $= R I^2$	$UI \sin \varphi$	UI

Remarque: Une résistance ne consomme que de la puissance active.

Une bobine parfaite ne consomme que de la puissance réactive.

Un condensateur parfait ne fournit que de la puissance réactive.

Dans un dipôle R-L-C, seule la résistance consomme de la puissance active.

□ Exercice 2

.17.2 PUISSANCES EN TRIPHASE

.17.2.1 Expressions des puissances

Puissance moyenne (puissance active): $P = U.I. \sqrt{3} \cos \varphi$

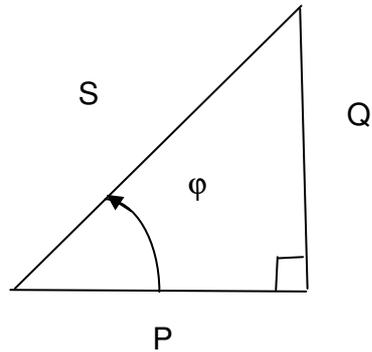
Puissance réactive : $Q = U.I. \sqrt{3} \sin \varphi$

Puissance apparente : $S = U.I. \sqrt{3}$

.17.2.2 Relations entre les puissances

$$P = S \cos \varphi \quad Q = S \sin \varphi \quad \frac{Q}{P} = \tan \varphi \quad P^2 + Q^2 = S^2$$

.17.2.3 Triangle des puissances



.17.3 PUISSANCE COMPLEXE EN MONOPHASE

.17.3.1 Définition.

La puissance complexe est définie par la relation suivante :

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$$

\underline{I}^* est l'intensité complexe conjuguée.

.17.3.2 Relation entre les puissances.

$$\underline{U} = U$$

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad \text{Si } \varphi_u = 0$$

$$\text{Arg} (I) = \varphi_i = - \varphi$$

$$I = I \cos(-\varphi) + j I \sin(-\varphi)$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = U (I \cos(\varphi) + j I \sin(\varphi))$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = U (I \cos \varphi + j I \sin \varphi)$$

$$\text{Si } \varphi_i = 0 \quad \underline{I} = I \quad \underline{I}^* = I$$

$$U = U \cos \varphi_u + j U \sin \varphi_u$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = (U \cos \varphi_u + j U \sin \varphi_u) I$$

$$\text{or } \varphi = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_u - 0 = \varphi_u$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = (U \cos \varphi + j U \sin \varphi) I$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = U (I \cos \varphi + j I \sin \varphi)$$

Dans les deux cas : $\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* = UI \cos \varphi + j UI \sin \varphi$

soit $\underline{S} = P + jQ$

□ Exercice 3

.17.4 EXERCICES.

.17.4.1 □ Exercice 1

Un moteur a une puissance utile de 10 kW et un rendement de 80%. Il consomme un courant d'intensité 65 A sous une tension de 220 V. Calculer :

La puissance apparente

La puissance active absorbée

Le facteur de puissance

La puissance réactive

.17.4.2 □ Exercice 2

Une installation est alimentée en courant sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz sous la tension efficace $U = 220$ V. Elle comprend, montés en dérivation, une résistance non inductive consommant une puissance $P = 1,00$ kW et un moteur consommant une puissance $P' = 2,00$ kW; le facteur de puissance du moteur est égal à 0,60.

1. Calculer le facteur de puissance de l'installation ainsi que l'intensité efficace du courant circulant dans la ligne.
2. Pour augmenter le facteur de puissance, on place entre les bornes de l'installation, un condensateur de capacité $C = 100 \mu\text{F}$. Déterminer la nouvelle valeur du facteur de puissance.

.17.4.3 □ Exercice 3

Recommencer l'exercice 3 en utilisant les nombres complexes

.17.4.4 * Exercice 4

On monte, en série, un condensateur de capacité $C = 4\mu\text{F}$ et une bobine, de résistance $R = 500 \Omega$ et d'inductance $L = 1,00$ H. Aux bornes de la portion de circuit ainsi constituée, on applique une tension alternative sinusoïdale, de valeur efficace $U = 220$ V et de pulsation ω variable.

1. Pour quelle valeur ω_0 , de la pulsation, la puissance dissipée dans la portion de circuit est-elle maximale ? Quelles sont les valeurs de la puissance maximale et du déphasage entre intensité et tension ?
2. Pour quelles valeurs ω_1 , et ω_2 de ω , la puissance dissipée dans la portion de circuit est-elle égale à la moitié de la puissance maximale ? Calculer les déphasages entre intensité et tension correspondants.
3. On désigne par $Q =$ la valeur efficace de la charge du condensateur. Exprimer Q en fonction de U, R, L, C et ω . Pour quelle valeur ω_3 de ω , Q passe-t-il par un maximum ?

.17.4.5* Exercice 5

On veut calculer le facteur de puissance de l'installation électrique d'un atelier dans différentes conditions de fonctionnement. La tension efficace aux bornes de l'installation reste toujours égale à 200 V. La fréquence vaut $f = 50$ Hz.

CONDITIONS	moteur tournant à vide	moteur à vide et éclairage	moteur tournant à pleine charge	moteur à pleine charge et éclairage
Puissance consommée par le moteur	3 kW	3 kW	27 kW	27 kW
Puissance consommée par l'éclairage	0	2 kW	0	2 kW
Intensité efficace dans la ligne	50 A	I_1	160 A	I_2

- 1 Calculer le facteur de puissance du moteur dans les deux types de fonctionnement. ($\cos \varphi$ et $\cos \varphi'$).
- 2 Calculer I_1 et I_2 .
- 3 Calculer le facteur de puissance de l'installation dans les 4 types de fonctionnement. ($\cos \varphi_1, \cos \varphi_2, \cos \varphi_3, \cos \varphi_4$).

4. On veut relever à 0,9 le facteur de puissance. Quelle doit être la capacité du condensateur nécessaire, monté en parallèle sur l'installation, dans le 4^{ème} mode de fonctionnement ?

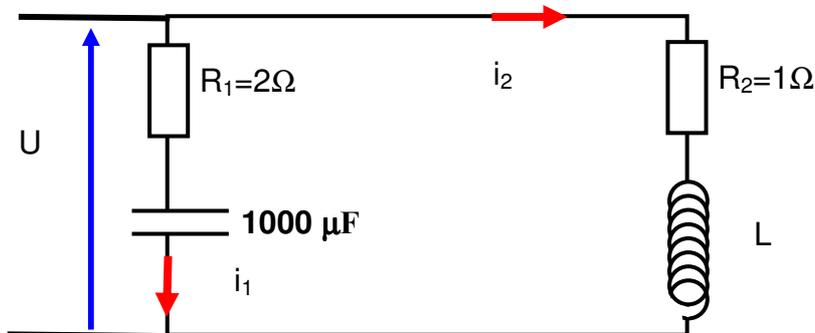
.17.4.6 * Exercice 6

Un dipôle est constitué de deux branches en parallèle.

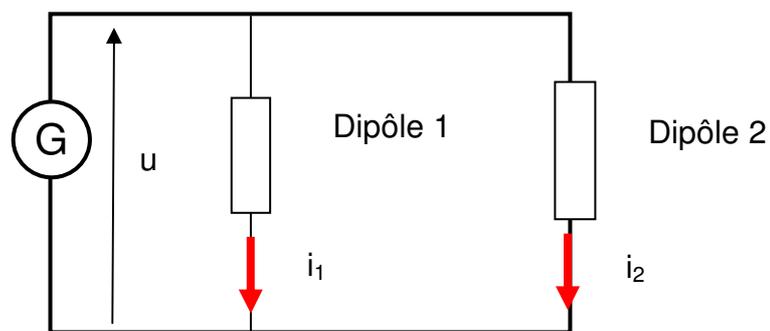
La puissance dissipée dans la résistance de $2\ \Omega$ est égale à 20 W.

$$L = 0,005\ \text{H} \quad C = 1000\ \mu\text{F} \quad \omega = 200\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Déterminer les puissances mises en jeu dans ce dipôle. Préciser si le dipôle est inductif ou capacitif.



.17.4.7 * Exercice 7



$$\underline{U} = 40\ \text{V} \angle 60^\circ \quad \underline{Z}_1 = 8\ \Omega \angle 30^\circ \quad \underline{Z}_2 = 10\ \Omega \angle 60^\circ$$

Déterminer les puissances active, réactive et apparente mises en jeu par le calcul en complexes.

Déterminer l'intensité du courant débité par le générateur et le facteur de puissance du dipôle formé par Z_1 et Z_2 en parallèle.

.17.5 CORRIGES DES EXERCICES

.17.5.1 Corrigé de l'exercice 1

$$S=UI \quad S=220 \times 65 = 14300 \text{ VA}$$

$$P_{\text{absorbée}} = P_a = P_u / \eta \quad P_a = 10000 / 0,8 = 12500 \text{ W}$$

$$\cos \varphi = P_a / S \quad \cos \varphi = 12500 / 14300 = 0,874$$

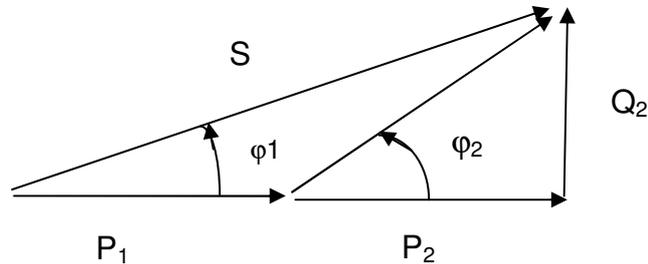
$$\sin \varphi = 0,486$$

$$Q = UI \sin \varphi \quad Q = 220 \times 65 \times 0,486 = 6950 \text{ VAR}$$

.17.5.2 Corrigé de l'exercice 2

1. φ_2 est le déphasage de u par rapport à i_2 $\cos \varphi_2 = 0,6$ $\tan \varphi_2 = 1,33$

φ est le déphasage de u par rapport à i



$$\tan \varphi = \frac{Q_2}{P_1 + P_2} = \frac{P_2 \tan \varphi_2}{P_1 + P_2} \quad \tan \varphi = \frac{2000 \times 1,33}{3000} = 0,888 \quad \varphi = 41,6^\circ$$

$$P = 3000 \text{ W} \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad S = \sqrt{(P_1 + P_2)^2 + (P_2 \tan \varphi_2)^2}$$

$$I_1 = \frac{P_1}{U \cos \varphi_1} \quad I_1 = \frac{1000}{220 \times 1} = 4,54 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{P_2}{U \cos \varphi_2} \quad I_2 = \frac{2000}{220 \times 0,6} = 15,15 \text{ A}$$

$$S = \sqrt{3000^2 + (2000 \times 1,33)^2} = 4000 \text{ V.A}$$

$$I = \frac{S}{U} \quad I = \frac{4000}{220} = 18,2 \text{ A}$$

Remarque :

$$I \neq I_1 + I_2 \quad S \neq S_1 + S_2$$

2. La mise en place du condensateur ne modifie pas la puissance active de l'installation qui reste égale à 3000 W mais le condensateur fournit de la puissance réactive.

La nouvelle puissance réactive est $Q' = Q - U^2 C \omega$

$$\tan \varphi' = \frac{Q'}{P'} = \frac{Q - U^2 C \omega}{P}$$

$$\tan \varphi' = \frac{2000 \times 1,33 - 220^2 \times 100 \times 10^{-6} \times 2\pi \times 50}{3000} = 0,3798$$

Le nouveau facteur de puissance est $\cos \varphi' = 0,935$

.17.5.3 Corrigé de l'exercice 3

$$\underline{U} = 220 \text{ V} \angle 0^\circ \quad \cos \varphi_2 = 0,6 \quad \varphi_2 = +53,1^\circ$$

$$I_1 = \frac{P_1}{U \cos \varphi_1} \quad I_1 = \frac{1000}{220 \times 1} = 4,54 \text{ A} \quad \underline{I}_1 = 4,54 \quad \underline{I}_1^* = 4,54$$

$$\underline{S}_1 = \underline{U} \cdot \underline{I}_1^* = 220(4,54) = 998,8 \text{ VA}$$

$$I_2 = \frac{P_2}{U \cos \varphi_2} \quad I_2 = \frac{2000}{220 \times 0,6} = 15,15 \text{ A} \quad \text{Arg}(\underline{I}_2) = -\varphi_2 = -53,1^\circ$$

$$\underline{I}_2 = 15,15 \angle -53,1^\circ \quad \underline{I}_2^* = 15,15 \angle +53,1^\circ = 2000 - 2665j$$

$$\underline{S}_2 = \underline{U} \cdot \underline{I}_2^* = 220(15,15 \angle 53,1^\circ) = 3333 \angle 53,1^\circ = 2000 + 2665j$$

$$P_2 = 2000 \text{ W} \quad Q_2 = 2665 \text{ VAR} \quad S_2 = 3333 \text{ VA}$$

$$P_1 = 1000 \text{ W} \quad Q_1 = 0 \quad S_1 = 1000 \text{ W}$$

En complexe on peut faire la somme suivante:

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 = 1000 + 2000 + 2665j = 3000 + 2665j = 4012 \angle 41,6^\circ$$

$$P = 3000 \text{ W} \quad Q = 2665 \text{ VAR} \quad S = 4012 \text{ VA}$$

.17.5.4 Corrigé de l'exercice 4

$P = UI \cos \varphi$ P est maximale quand I est maximale et $\cos \varphi = 1$ puisque U est constante. Le circuit doit donc être en résonance d'intensité.

$$P_{\max} = UI_{\max} = U \frac{U}{R} = \frac{U^2}{R}$$

$$\text{A la résonance } LC\omega_0^2 = 1 \Rightarrow \omega_0 = 500 \text{ rad.s}^{-1} \quad P_{\max} = \frac{220^2}{500} = 96,8 \text{ W}$$

$$P = \frac{P_{\max}}{2} \quad UI \cos \varphi = \frac{U^2}{2R} \quad U \frac{U R}{Z Z} = \frac{U^2}{2R} \Rightarrow Z^2 = 2R^2$$

$$R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2 = 2R^2 \Rightarrow L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R$$

On a déjà rencontré ce calcul dans le calcul de la bande passante.

$$\text{pour } L\omega - \frac{1}{C\omega} = -R \quad \omega = \omega_1 = \frac{-RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$\underline{Z}_1 = R + (L\omega - \frac{1}{C\omega})j = R - jR \Rightarrow \text{Arg}(\underline{Z}_1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Si } \text{Arg}(\underline{I}_1) = 0 \Rightarrow \text{Arg}(\underline{U}) = \text{Arg}(\underline{Z}_1) = -\frac{\pi}{4}$$

u est en retard sur i de 45°

$$\text{pour } L\omega - \frac{1}{C\omega} = R \quad \omega = \omega_2 = \frac{RC + \sqrt{R^2C^2 + 4LC}}{2LC}$$

$$\underline{Z}_2 = R + (L\omega - \frac{1}{C\omega})j = R + jR \Rightarrow \text{Arg}(\underline{Z}_2) = \frac{\pi}{4} \quad \text{u est en avance sur i de } 45^\circ$$

$$\text{Si } \text{Arg}(\underline{I}_2) = 0 \Rightarrow \text{Arg}(\underline{U}) = \text{Arg}(\underline{Z}_2) = \frac{\pi}{4}$$

$$Q = CU_c = CZ_c I = C \frac{1}{C\omega} \frac{U}{Z} = \frac{U}{\omega \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2\omega^2 + \omega^2(L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}}$$

$$Q = \frac{U}{\sqrt{y}} \quad Q \text{ est max quand } y \text{ est min donc quand } \frac{dy}{d\omega} = 0$$

$$y = R^2\omega^2 + L^2\omega^4 + \frac{1}{C^2} - \frac{2L\omega^2}{C}$$

$$\frac{dy}{d\omega} = 2\left(R^2 - \frac{2L}{C}\right)\omega + 4L^2\omega^3 \Rightarrow \frac{dy}{d\omega} = 0 \text{ pour } \omega^2 = \left(\frac{2L}{C} - R^2\right) \frac{1}{2L^2}$$

$$\omega^2 = 125000 \quad \omega = 353,5 \text{ rad.s}^{-1}$$

17.5.5 Corrigé de l'exercice 5

1. A vide le moteur consomme 3 kW et est traversé par un courant

$$\text{d'intensité } 50 \text{ A.} \quad \cos \varphi = \frac{P}{UI} \quad \cos \varphi = \frac{3000}{200 \times 50} = 0,3$$

A pleine charge : $\cos \varphi' = \frac{P}{UI}$ $\cos \varphi' = \frac{27000}{200 \times 160} = 0,84$

2. Le moteur tourne à vide et l'éclairage fonctionne

La puissance active totale consommée est : $P = P_e + P_m$

$P = 2 + 3 = 5 \text{ kW}$

La puissance réactive consommée par le moteur $Q = P_m \tan \varphi$

$\cos \varphi = 0,3$ $\tan \varphi = 3,18$ $Q = 3 \times 3,18 = 9,54 \text{ kVAR}$

La puissance apparente de l'installation

$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ $S = \sqrt{5^2 + 9,54^2} = 10,77 \text{ kVA}$

$S = U I_1$

$I_1 = \frac{S}{U}$ $I_1 = \frac{10770}{200} = 53,8 \text{ A}$

Le moteur tourne à pleine charge et l'éclairage fonctionne

La puissance active totale consommée est : $P = P_e + P_m$

$P = 2 + 27 = 29 \text{ kW}$

La puissance réactive consommée par le moteur $Q = P_m \tan \varphi'$

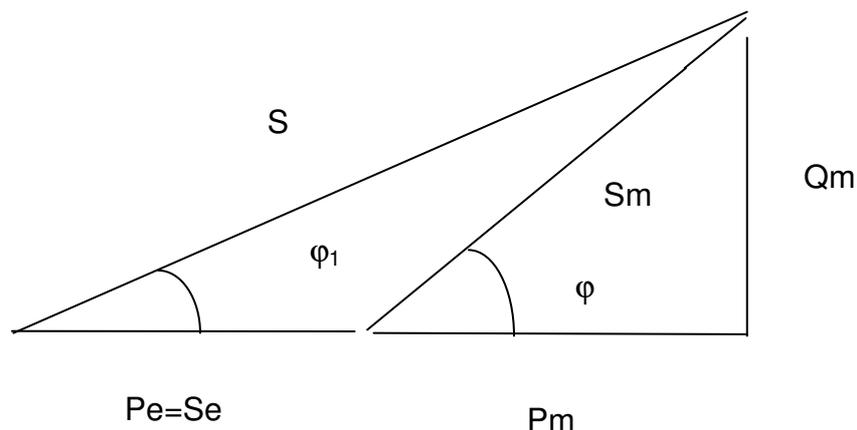
$\cos \varphi' = 0,844$ $\tan \varphi' = 0,635$ $Q = 27 \times 0,635 = 17,16 \text{ kVAR}$

La puissance apparente de l'installation

$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ $S = \sqrt{29^2 + 17,16^2} = 33,7 \text{ kVA}$

$S = U I_2$

$I_2 = \frac{S}{U}$ $I_2 = \frac{33700}{200} = 168,5 \text{ A}$



3.

$P = P_e + P_m$ $Q = Q_e + Q_m = 0 + Q_m = Q_m$

$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$

Remarque: $S \neq S_e + S_m$

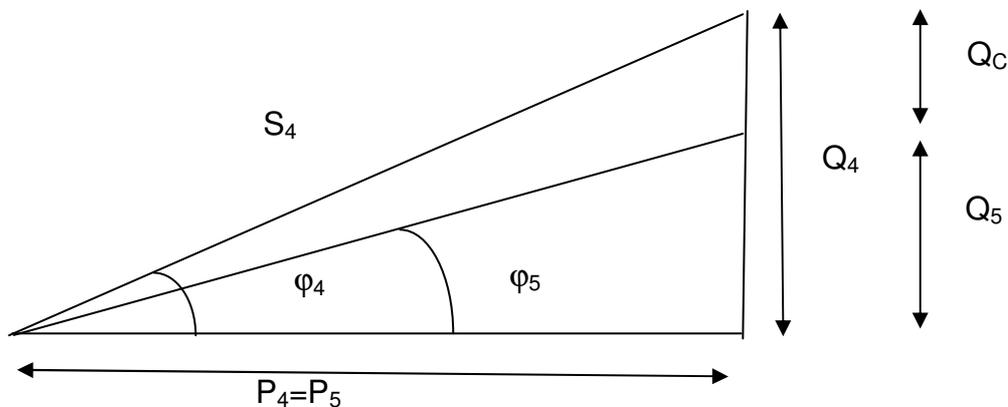
Facteur de puissance de l'installation $\cos \varphi = \frac{P}{UI}$ où I est l'intensité du courant de ligne

$I \neq I_e + I_m$ à cause des déphasages entre les courants

$$\cos \varphi_1 = \frac{3000}{200 \times 50} = 0,3 \qquad \cos \varphi_2 = \frac{5000}{200 \times 53,8} = 0,465$$

$$\cos \varphi_3 = \frac{27000}{200 \times 160} = 0,844 \qquad \cos \varphi_4 = \frac{29000}{200 \times 168,5} = 0,86$$

4.



Initialement les différentes puissances sont P_4 , Q_4 et S_4

Pour augmenter $\cos \varphi$ il faut diminuer φ et donc passer de φ_4 à φ_5

Quand on place un condensateur aux bornes de l'installation, il n'y a pas de modification de la puissance active donc $P_4 = P_5$

Mais le condensateur apporte la puissance réactive Q_C et la puissance réactive de l'installation passe de Q_4 à Q_5

$$Q_C = Q_4 - Q_5$$

$$U^2 C \omega = U^2 C 2\pi f = Q_4 - Q_5$$

$$C = \frac{Q_4 - Q_5}{U^2 2\pi f} = \frac{P_4 \tan \varphi_4 - P_5 \tan \varphi_5}{U^2 2\pi f} = \frac{P_4 (\tan \varphi_4 - \tan \varphi_5)}{U^2 2\pi f}$$

$$\cos \varphi_4 = 0,86 \quad \tan \varphi_4 = 0,593 \quad \cos \varphi_5 = 0,9 \quad \tan \varphi_5 = 0,484$$

$$C = \frac{29000(0,593 - 0,484)}{200^2 \times 2 \times \pi \times 50} = 250 \times 10^{-6} \text{ F}$$

$$C = \frac{29000(0,593 - 0,484)}{200^2 \times 2 \times \pi \times 50} = 250 \times 10^{-6} \text{ F}$$

$$C = 250 \mu\text{F}$$

.17.5.6 Corrigé de l'exercice 6

$$Z_L = L\omega \quad Z_L = 0,005 \times 200 = 1 \Omega$$

$$P_{R1} = R_1 I_1^2 \Rightarrow I_1 = \sqrt{\frac{P_{R1}}{R_1}} \quad I_1 = \sqrt{\frac{20}{2}} = 3,16 \text{ A}$$

On choisit $\underline{I}_1 = 3,16 \text{ A} \angle 0^\circ$

$$\underline{Z}_1 = 2 - 5j \quad \underline{Z}_2 = 1 + j$$

$$\underline{U} = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 = (2 - 5j)3,16 = 6,32 - 15,8j$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} = \frac{6,32 - 15,8j}{1 + j} = -4,74 - 11,06j$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \quad \underline{I} = 3,16 - 4,74 - 11,06j = -1,58 - 11,06j$$

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* \quad \underline{S} = (6,32 - 15,8j)(-1,58 + 11,06j) = 164,8 + 94,9j$$

$$Z_C = \frac{1}{C\omega} \quad Z_C = \frac{1}{1000 \times 10^{-6} \times 200} = 5 \Omega$$

$$\underline{S} = 164,8 + 94,9j = P + jQ \quad Q > 0 \text{ donc le dipôle est inductif}$$

.17.5.7 Corrigé de l'exercice 7

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_1} \quad \underline{I}_1 = \frac{40 \angle 60^\circ}{8 \angle 30^\circ} = 5 \text{ A} \angle 30^\circ \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_2} \quad \underline{I}_2 = \frac{40 \angle 60^\circ}{10 \angle 60^\circ} = 4 \text{ A} \angle 0^\circ$$

$$\underline{S}_1 = \underline{U} \cdot \underline{I}_1^* \quad \underline{S}_1 = (40 \angle 60^\circ) \times (5 \angle -30^\circ) = 200 \text{ VA} \angle 30^\circ$$

$$\underline{S}_1 = 173 + 100j \quad P_1 = 173 \text{ W} \quad Q_1 = 100 \text{ VAR}$$

$Q_1 > 0$: le dipôle 1 est inductif.

$$\underline{S}_2 = \underline{U} \cdot \underline{I}_2^* \quad \underline{S}_2 = (40 \angle 60^\circ) \times (4 \angle 0^\circ) = 160 \text{ VA} \angle 60^\circ$$

$$\underline{S}_2 = 80 + 139j \quad P_2 = 80 \text{ W} \quad Q_2 = 139 \text{ VAR}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \quad \underline{I} = (4,33 + 2,5j) + 4 = 8,33 + 2,5j$$

$Q_2 > 0$: le dipôle 1 est inductif.

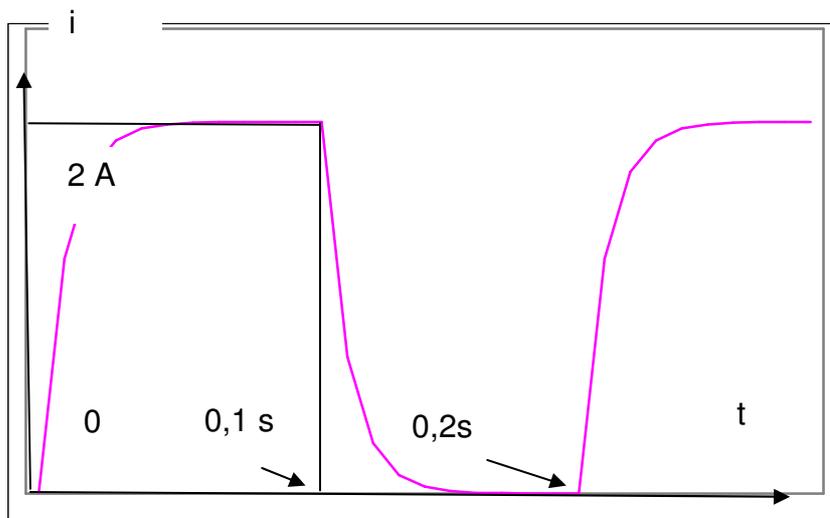
$$P = P_1 + P_2 \quad P = 253 \text{ W} \quad Q = Q_1 + Q_2 = 239 \text{ VAR}$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad S = \sqrt{253^2 + 239^2} = 348 \text{ VA}$$

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \quad \underline{I} = 4,33 + 2,5j + 4 = 8,33 + 2,5j = 8,7 \angle 16,7^\circ$$

$$\underline{I}^* = 8,7 \angle -16,7^\circ$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} \quad \cos \varphi = \frac{P}{S} \quad \cos \varphi = \frac{253}{348} = 0,727$$



.18.2 VALEUR MOYENNE

.18.2.1 Définition

Une fonction périodique du temps $y=f(t)$, de période T , a pour valeur moyenne :

$$\langle y(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T y(t) dt$$

La notation $\langle (t) \rangle$ est la notation normalisée d'une moyenne temporelle

Remarque : dans le cas où la valeur moyenne, calculée sur une période, est nulle, on effectue le calcul sur la moitié de période où la fonction est positive.

.18.2.2 Exemple.

Cas d'un signal sinusoïdal : $i = I_m \cos \omega t = I_m \cos (2\pi/T)t$.

$$\langle i(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \cos \frac{2\pi}{T} t dt = -\frac{1}{T} \frac{T}{2\pi} \left[\sin \frac{2\pi}{T} t \right]_0^T = 0$$

Dans ce cas on calcule la valeur moyenne sur une demi-période où la fonction est positive.

$$\langle i(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} I_m \cos \frac{2\pi}{T} t dt = -\frac{I_m}{T} \frac{T}{2\pi} \left[\sin \frac{2\pi}{T} t \right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}$$

$$\langle i(t) \rangle = -\frac{I_m}{2\pi} \left(\sin \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} - \sin \frac{2\pi}{T} \left(-\frac{T}{4}\right) \right) = \frac{I_m}{\pi}$$

.18.3 VALEUR EFFICACE

.18.3.1 Valeur efficace de l'intensité d'un courant périodique.

La valeur efficace de l'intensité d'un courant périodique est l'intensité d'un courant continu constant qui, parcourant le même conducteur ohmique pendant la même durée, y produirait le même dégagement de chaleur.

Définition

Une fonction périodique du temps $y=f(t)$, de période T , a pour valeur efficace Y telle que:

$$Y^2 = \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt$$

.18.3.2 Exemple

Cas d'un signal sinusoïdal : $i = I_m \cos \omega t = I_m \cos (2\pi/T)t$.

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2 \left(\frac{2\pi}{T} t \right) dt \quad I^2 = \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \left(\frac{1 + \cos \left(\frac{2\pi}{T} t \right)}{2} \right) dt$$

$$I^2 = \frac{I_m^2}{2T} \left[t - \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t \right]_0^T = \frac{I_m^2}{2T} (T) = \frac{I_m^2}{2} \quad I = \frac{I_m \sqrt{2}}{2}$$

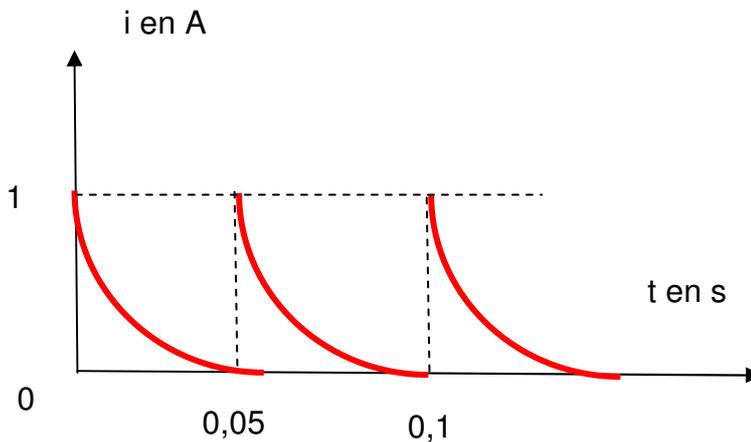
.18.3.3 Mesure de grandeurs efficaces.

Les valeurs efficaces des tensions et des intensités peuvent être mesurées à l'aide de multimètres électroniques. Pour la plupart des appareils, les résultats ne seront corrects que si la fréquence est inférieure à 400 Hz et si l'onde est sinusoïdale.

.18.4 EXERCICES

.18.4.1 Exercice 1

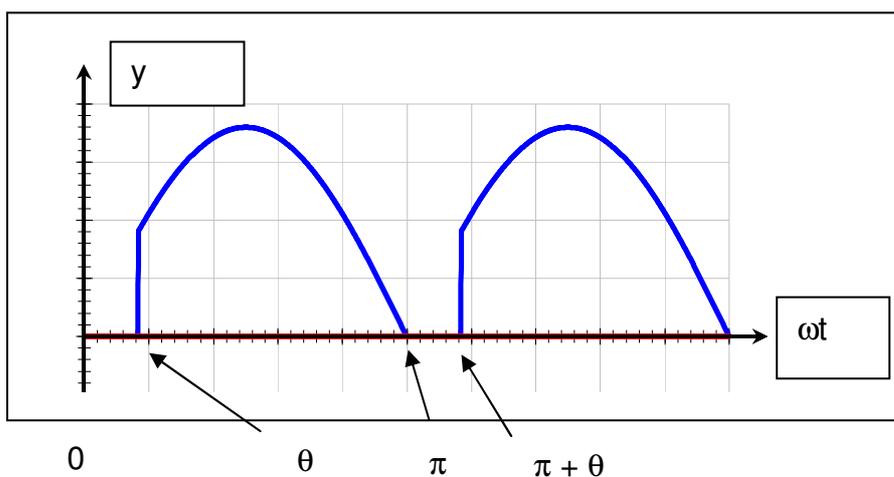
Déterminer la valeur moyenne et la valeur efficace de la fonction $y = f(t)$ pour laquelle $y = 10 e^{-200t}$ dans le premier intervalle de temps.



.18.4.2 Exercice 2:

Le signal représenté a une valeur moyenne égale à $Y_m / 2$. Calculer la valeur de l'angle θ , sachant que ce signal résulte du redressement d'une onde sinusoïdale.

Calculer la valeur efficace du signal



.18.5 CORRIGES DES EXERCICES

.18.5.1 Corrigé de l'exercice 1

La période est $T = 0,05$ s

$$\langle y(t) \rangle = \frac{1}{0,05} \int_0^{0,05} 10e^{-200t} dt = -\frac{10}{0,05 \times 200} [e^{-200t}]_0^{0,05} \quad \langle y(t) \rangle = -e^{-10} + 1 \approx 1$$

$$Y^2 = \frac{1}{0,05} \int_0^{0,05} (10e^{-200t})^2 dt = \frac{100}{0,05} \int_0^{0,05} e^{-400t} dt = 5 - 5e^{-20}$$

$$Y \approx 2,24$$

.18.5.2 Corrigé de l'exercice 2

$$\langle y(t) \rangle = \frac{Y_m}{T} \int_{t_0}^{\frac{T}{2}} y dt = \frac{2Y_m}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin \omega t dt \quad \text{On effectue un changement de variable}$$

$$d(\omega t) = \omega dt \quad dt = \frac{d(\omega t)}{\omega}$$

$$\langle y(t) \rangle = \frac{2Y_m}{T} \int_{\theta}^{\pi} \sin \omega t \frac{d(\omega t)}{\omega} = \frac{2Y_m}{\omega T} \int_{\theta}^{\pi} \sin \omega t d(\omega t) = \frac{2Y_m}{2\pi} \int_{\theta}^{\pi} \sin \omega t d(\omega t) = \frac{Y_m}{\pi} [-\cos \omega t]_{\theta}^{\pi}$$

$$\langle y(t) \rangle = \frac{Y_m}{\pi} [-\cos \omega t]_{\theta}^{\pi} = \frac{Y_m}{\pi} (1 + \cos \theta)$$

$$\langle y(t) \rangle = \frac{Y_m}{2} \Rightarrow \frac{Y_m}{\pi} (1 + \cos \theta) = \frac{Y_m}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\pi}{2} - 1 \Rightarrow \theta = 55,2^\circ \quad \theta = 0,96 \text{ rad}$$

$$Y^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} Y_m^2 \sin^2 \omega t d(\omega t) = \frac{Y_m^2}{\pi} \int_{\theta}^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right) d(\omega t)$$

$$Y^2 = \frac{Y_m^2}{2\pi} \left([\omega t]_{\theta}^{\pi} - [\sin 2\omega t]_{\theta}^{\pi} \right) = \frac{Y_m^2}{2\pi} (\pi - \theta - \sin 2\theta)$$

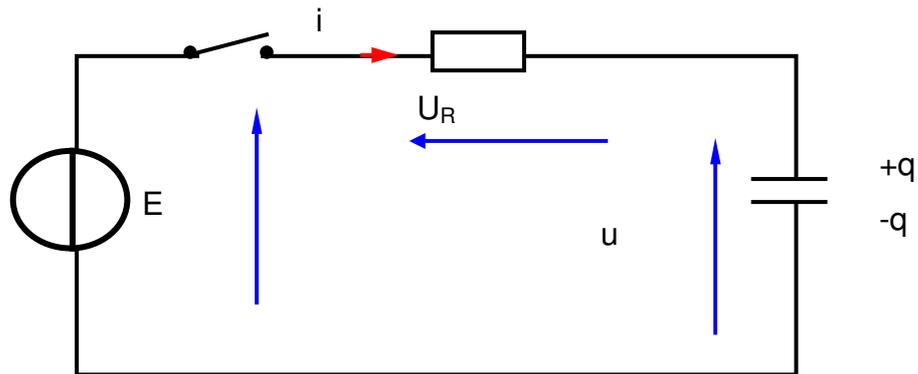
REGIMES TRANSITOIRES

REGIMES TRANSITOIRES - DIPOLE RC

.18.6 CHARGE D'UN CONDENSATEUR

On étudie la charge d'un condensateur au travers d'une résistance à l'aide d'un générateur fournissant une tension constante.

.18.6.1 Schéma du montage



.18.6.2 Equation différentielle

$E = \text{constante}$

Le condensateur est déchargé ; à $t=0$ on ferme l'interrupteur K

$$\forall t \geq 0 \quad E = U_R + u = R i + u$$

Avec les conventions utilisées $q = Cu$ et $i = \frac{dq}{dt}$

D'où $i = C \frac{du}{dt}$ En remplaçant i par cette expression dans la relation précédente, on obtient :

$$E = RC \frac{du}{dt} + u$$

Cette équation est une équation différentielle du premier ordre.

.18.6.3 Expression de $u = f(t)$

On sait que $u = A e^{\alpha t} + B$ est solution de cette équation différentielle du premier ordre.

Nous allons déterminer les valeurs des constantes A , B et α .

Pour cela on écrit que l'équation différentielle est vérifiée quand on remplace u par

$$A e^{\alpha t} + B$$

$$E = RC \frac{d(A e^{\alpha t} + B)}{dt} + A e^{\alpha t} + B$$

$$E = RCA\alpha e^{\alpha t} + A e^{\alpha t} + B = e^{\alpha t} A(RC\alpha + 1) + B$$

$$E = e^{\alpha t} A(RC\alpha + 1) + B$$

Pour que cette relation soit vérifiée quel que soit t, il faut que $E=B$ et que $A(RC\alpha + 1) = 0$.

$$A \neq 0 \Rightarrow RC\alpha + 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{RC} \quad \text{D'où } u = A e^{(-\frac{1}{RC}t)} + E$$

On sait qu'à $t=0$, le condensateur est déchargé donc à $t=0$, $u=0$:

$$0 = A e^0 + E \quad \text{donc } A = -E \quad \text{et } u = -E e^{(-\frac{1}{RC}t)} + E = u = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$u = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

.18.6.4 Expression de $i=f(t)$

$$i = C \frac{du}{dt} = C \frac{d}{dt} \left(E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \right) = C \frac{d}{dt} \left(-E e^{-\frac{t}{RC}} \right) = -\frac{CE}{RC} (-e^{-\frac{t}{RC}})$$

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

.18.6.5 Constante de temps du dipôle RC :

.18.6.5.1 Définition.

On appelle constante de temps du dipôle RC le produit de la résistance par la capacité du condensateur.

$$\tau = RC$$

.18.6.5.2 Dimension

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} \quad [C] = \frac{[Q]}{[U]} \quad [RC] = \frac{[U]}{[I]} \frac{[Q]}{[U]} = \frac{[Q]}{[I]} = [T]$$

.18.6.5.3 Unités

Cette constante a la dimension d'un temps.

R en Ω C en F τ en s

.18.6.5.4 intérêt de τ

$$u = E \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \qquad i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

t	0	τ	5τ	∞
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	1	e^{-1}	e^{-5}	0
u	0	0,63 E	0,993 E	E
i	$\frac{E}{R}$	$0,37 \frac{E}{R}$	$0,007 \frac{E}{R}$	0

Si mathématiquement il faut un temps infini pour charger le condensateur, on peut considérer, dans la pratique, que le condensateur est complètement chargé à $t = 5 \tau$

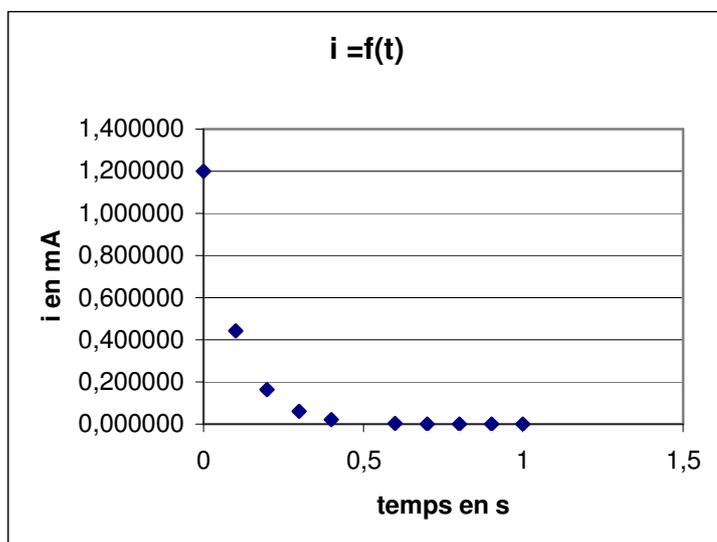
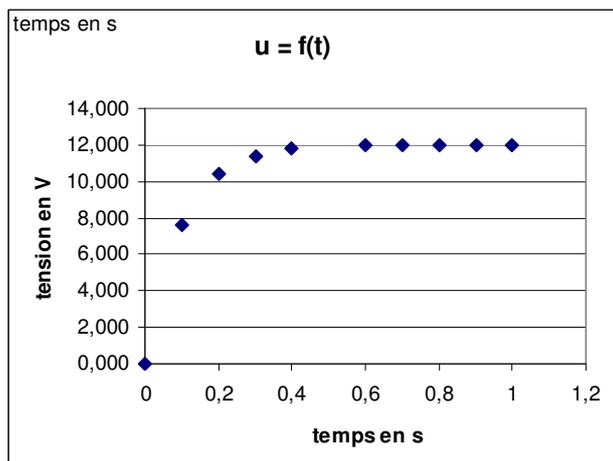
La charge du condensateur est d'autant plus lente que la capacité du condensateur est importante ou que la résistance est grande.

.18.6.6 Tracé des courbes

Exemple $E = 12 \text{ V}$

$C = 10 \mu\text{F}$ $R = 10\,000 \Omega$ $\tau = RC = 10 \times 10^{-6} \times 10\,000 = 0,1 \text{ sn s}$

	u en V	i en mA	t en s	u en V	i en mA
0	0,000	1,200	0,6	11,970	0,003
0,1	7,585	0,441	0,7	11,989	0,001
0,2	10,376	0,162	0,8	11,996	0,000
0,3	11,403	0,060	0,9	11,999	0,000
0,4	11,780	0,022	1	11,999	0,000



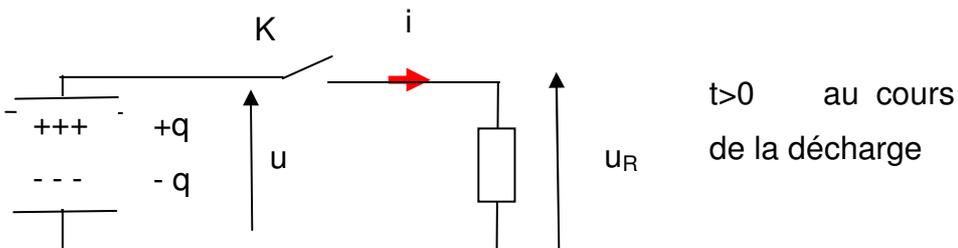
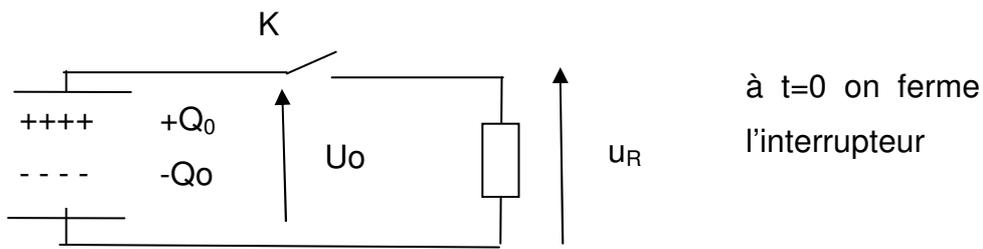
Au cours du temps, u croît et atteint E

L'intensité i , maximale à $t=0$ (valeur E / R), décroît et tend vers zéro

.18.7 DECHARGE D'UN CONDENSATEUR

Le condensateur, chargé sous une tension initiale U_0 , est relié à $t = 0$ à une résistance R .

.18.7.1 Montage



.18.7.2 Equation différentielle

$$\forall t \geq 0 \quad u = u_R$$

$$0 = u - R i \quad \text{or d'après les conventions } i = -C \frac{du}{dt}$$

d'où $u + RC \frac{du}{dt} = 0$ Equation différentielle du premier ordre sans second membre

.18.7.3 Expression de u=f(t)

On sait que $u = A e^{\alpha t}$ est solution de cette équation différentielle du premier ordre sans second membre.

Nous allons déterminer les valeurs des constantes A, B et α .

Pour cela on écrit que l'équation différentielle est vérifiée quand on remplace u par

$$A e^{\alpha t}$$

$$0 = RC \frac{d(A e^{\alpha t})}{dt} + A e^{\alpha t}$$

$$0 = RCA \alpha e^{\alpha t} + A e^{\alpha t} = e^{\alpha t} A (RC \alpha + 1)$$

Pour que cette relation soit vérifiée quel que soit t, il faut que $A(RC \alpha + 1) = 0$.

$$A \neq 0 \Rightarrow RC\alpha + 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{RC} \quad \text{D'où } u = Ae^{(-\frac{1}{RC}t)}$$

Condition à respecter : à $t = 0$, $u = U_0$

à $t = 0$, $i = I_0$ que vaut I_0 ?

$$0 = u - Ri \quad \text{à } t=0 \quad \text{on obtient } 0 = U_0 - RI_0 \quad \text{d'où } I_0 = \frac{U_0}{R}$$

On sait qu'à $t = 0$, le condensateur est chargé, donc à $t = 0$, $u = U_0$:

$$U_0 = Ae^0 \quad \text{donc } A = U_0$$

$$u = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad u = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec } \tau = RC$$

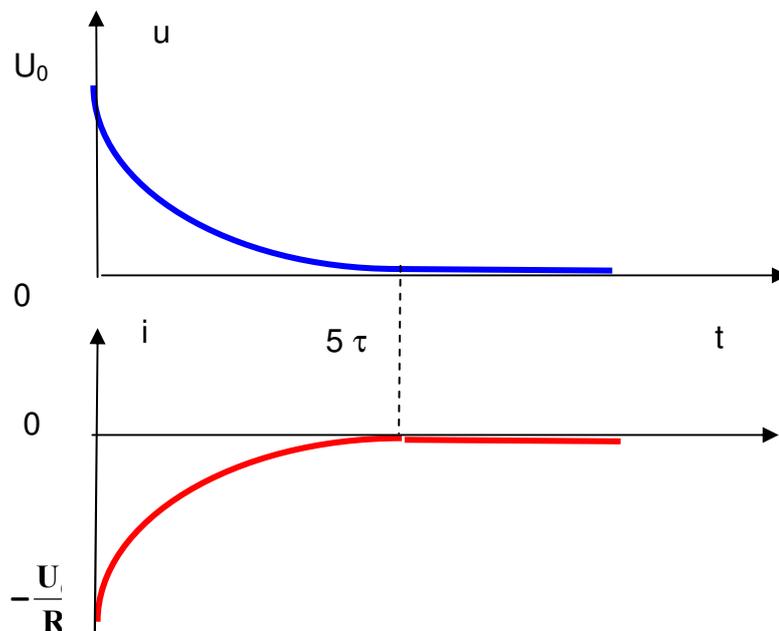
.18.7.4 Expression de $i=f(t)$

$$i = C \frac{du}{dt} = C \frac{d(e^{-\frac{t}{RC}})}{dt} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$$

.18.7.5 Allure des courbes.

La tension u , maximale à $t = 0$ décroît et tend vers zéro. L'intensité du courant, négative compte tenu des conventions de signe, croît et tend vers zéro.

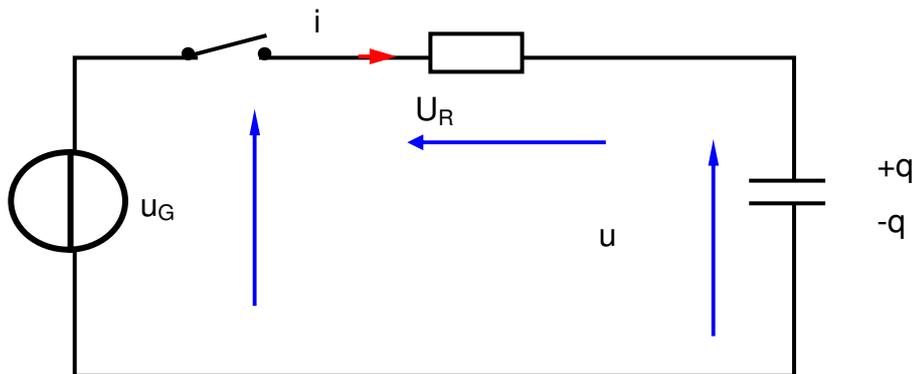
À $t = 5\tau$, on peut considérer que u et i sont nulles.



.18.8 DIPOLE RC SOUMIS A UNE TENSION EN CRENEAUX

Le générateur fournit une tension périodique de période T en créneaux. Il en résulte une alternance de charges et décharges du condensateur.

.18.8.1 Montage



.18.8.2 Equation différentielle

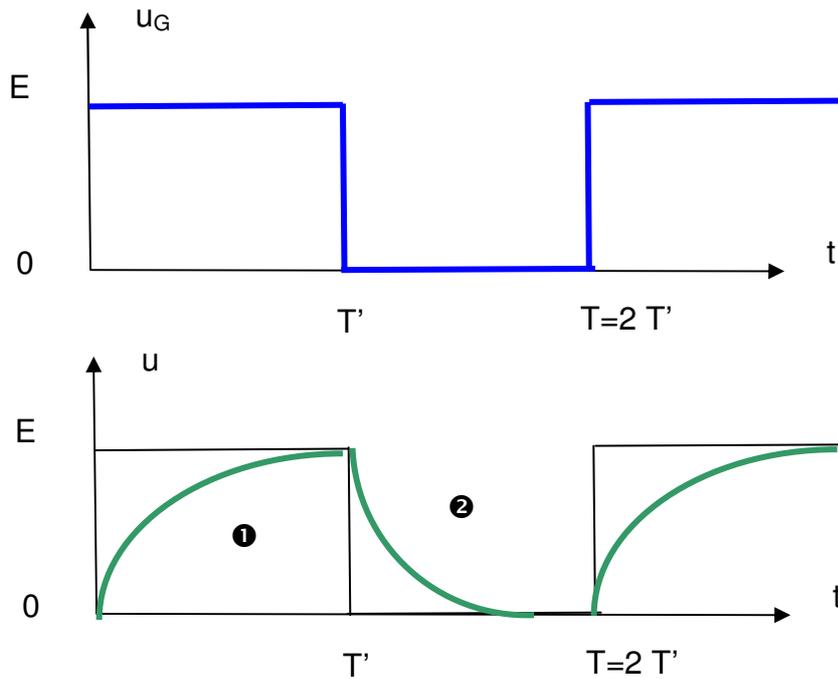
$$\forall t \quad u_G = Ri + u \quad i = C \frac{du}{dt}$$

.18.8.2.1 Cas où $5\tau < T'$

Pendant la première phase $u_G = E$ et le condensateur se charge.

Comme dans ce cas la valeur de τ est suffisamment petite, u atteint la valeur E avant la fin de la phase

Le condensateur arrive à se charger complètement pendant T' ($T' = T / 2$)



Equation de la partie 1 de la courbe $u=f(t)$

$$u = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

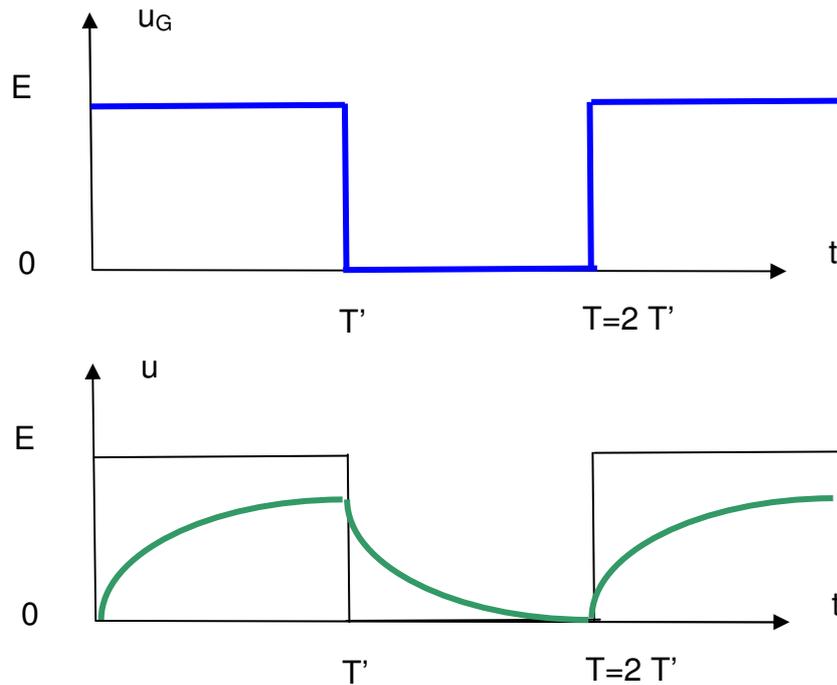
Au cours de la deuxième phase, la tension est nulle aux bornes du générateur mais ce dernier laisse passer le courant électrique et permet au condensateur de se décharger.

Equation de la partie 2 de la courbe $u=f(t)$

$$u = E(1 - e^{-\frac{(t-T')}{\tau}})$$

.18.8.2.2 Cas où $5\tau > T'$

Dans ce cas le condensateur n'arrive à se charger complètement pendant T' . La tension maximale est $< E$ à la fin de la première phase.



Remarque :

Dans tous les cas la tension $u=f(t)$ aux bornes du condensateur ne présente pas de discontinuité.

.18.9 EXERCICES

.18.9.1 Exercice 1:

Un condensateur de capacité C , chargé sous une tension E , est relié à la date $t=0$ à un conducteur ohmique de résistance R en série avec un condensateur de capacité C' complètement déchargé.

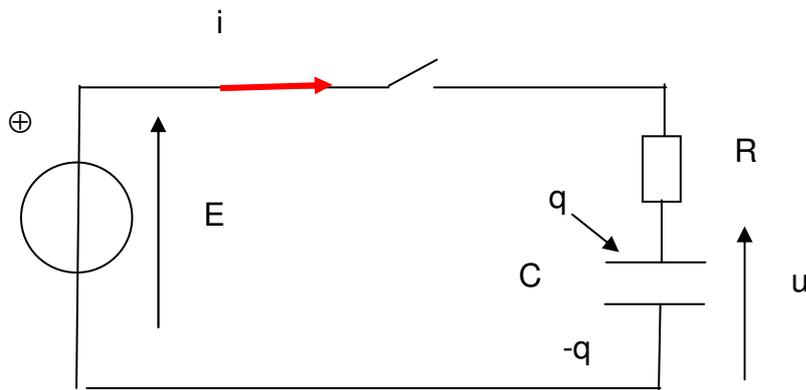
Etablir l'expression, en fonction du temps de l'intensité du courant i circulant dans le circuit. Vers quelle limite tendent les tensions u et u' aux bornes des condensateurs.

.18.9.2 Exercice 2

Un condensateur de capacité $C = 20 \mu\text{F}$ est chargé sous une tension $u = -25 \text{ V}$.

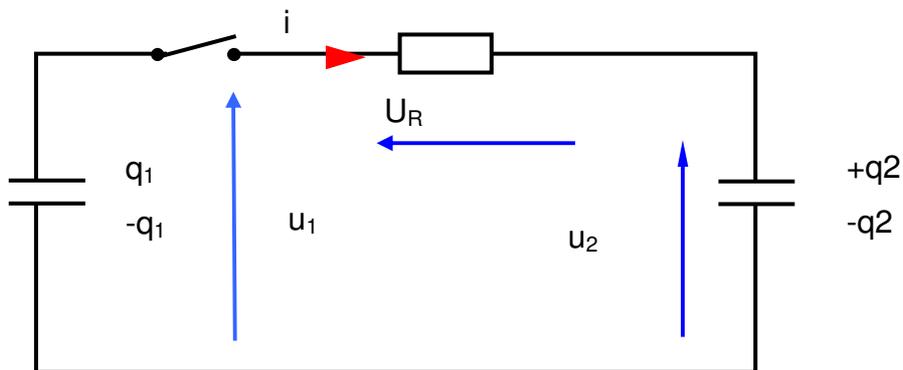
A la date $t = 0$, on relie le condensateur à un générateur de tension constante $E = 50 \text{ V}$ en série avec une résistance $R = 1000 \Omega$.

Etablir les expressions de u , q et i en fonction du temps et tracer les courbes correspondantes.



.18.10 CORRIGES DES EXERCICES

.18.10.1 Corrigé de l'exercice 1



Le sens positif choisi pour i est indiqué. Compte tenu du fléchage des tensions :

$$i = -C_1 \frac{du_1}{dt} = +C_2 \frac{du_2}{dt}$$

$$\forall t > 0 \quad u_1 = U_R + u_2 \quad u_1 = Ri + u_2$$

$$\text{En dérivant par rapport au temps ; } \frac{du_1}{dt} = R \frac{di}{dt} + \frac{du_2}{dt}$$

$$-\frac{i}{C_1} = R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C_2} \quad i \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) + R \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{Equation différentielle}$$

$i = A e^{\alpha t} + B$ est solution de l'équation différentielle.

Détermination de A, B et α

$$u_1 = Ri + u_2 \quad \text{à } t = 0 \quad u_1 = E \quad \text{et } u_2 = 0 \quad i = I_0$$

$$E = R i_0 + 0 \quad \text{donc à } t=0, \quad i_0 = \frac{E}{R}$$

$$i_0 = A e^0 + B \quad \frac{E}{R} = A + B$$

En remplaçant i par $A e^{\alpha t} + B$ dans l'équation différentielle, on obtient :

$$(A e^{\alpha t} + B) \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) + R \frac{d(A e^{\alpha t} + B)}{dt} = 0$$

$$A e^{\alpha t} \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) + B \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) + R A \alpha e^{\alpha t} = 0$$

Pour que cette relation soit vérifiée $\forall t$, il faut que :

$$B = 0 \quad A \left(\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \right) + R A \alpha = 0 \quad \text{d'où } \alpha = -\frac{C_1 + C_2}{R C_1 C_2}$$

$$\frac{E}{R} = A + B \quad \text{donc } \frac{E}{R} = A$$

$$\text{D'où l'expression de } i : i = \frac{E}{R} e^{-\frac{(C_1 + C_2)}{R C_1 C_2} t}$$

Expression des tensions :

$$i = -C_1 \frac{du_1}{dt} = +C_2 \frac{du_2}{dt}$$

en intégrant, on obtient :

$$u_1 = -\frac{E}{R C_1} \left(-R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right) e^{-\frac{R(C_1 + C_2)}{C_1 C_2} t} + k \quad \text{en écrivant que } u_1 = E \text{ à } t=0, \text{ on}$$

détermine k

$$u_1 = -\frac{E}{R C_1} \left(-R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right) e^{-\frac{R(C_1 + C_2)}{C_1 C_2} t} + E - \frac{E C_2}{C_1 + C_2}$$

On fait tendre t vers ∞

$$u_1^\infty = +E - \frac{E C_2}{C_1 + C_2} = \frac{E C_1}{C_1 + C_2}$$

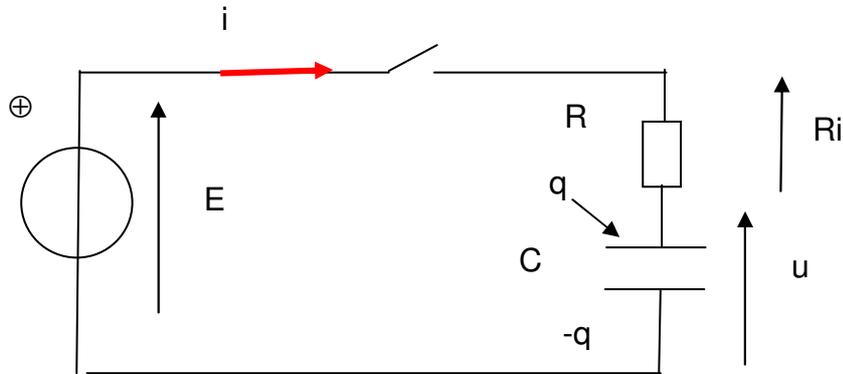
$$u_2 = \frac{E}{R C_2} \left(-R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right) e^{-\frac{R(C_1 + C_2)}{C_1 C_2} t} + k' \quad \text{à } t=0, \quad u_2=0 \text{ d'où } k'$$

$$u_2 = \frac{E}{R C_2} \left(-R \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \right) e^{-\frac{R(C_1 + C_2)}{C_1 C_2} t} + E \left(\frac{C_1}{C_1 + C_2} \right)$$

$$u_2^\infty = \frac{E C_1}{C_1 + C_2}$$

$u_1^\infty = u_2^\infty$; le condensateur 1 se décharge, le condensateur 2 se charge jusqu'à ce que $u_1 = u_2$; l'intensité est alors nulle.

.18.10.2 Corrigé de l'exercice 2



Avec les conventions utilisées ;

$$i = C \frac{du}{dt} \quad E = Ri + u = RC \frac{du}{dt} + u$$

$$E = RC \frac{du}{dt} + u \quad u = A e^{\alpha t} + B$$

Détermination de A, B et α

$$\text{D'où : } E = RC \frac{d(Ae^{\alpha t} + B)}{dt} + (Ae^{\alpha t} + B)$$

$$E = RCA\alpha e^{\alpha t} + Ae^{\alpha t} + B \quad E = B \quad \text{et} \quad RCA\alpha + A = 0$$

$$\alpha = -\frac{1}{RC} \quad \alpha = -\frac{1}{1000 \times 20 \times 10^{-6}} = -50 \quad \alpha = -50 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{De plus à } t=0, u = -25 \text{ V} \quad -25 = A e^0 + B = A + B$$

$$-25 = A + E = A + 50 \quad A = -75 \text{ V} \quad B = 50 \text{ V}$$

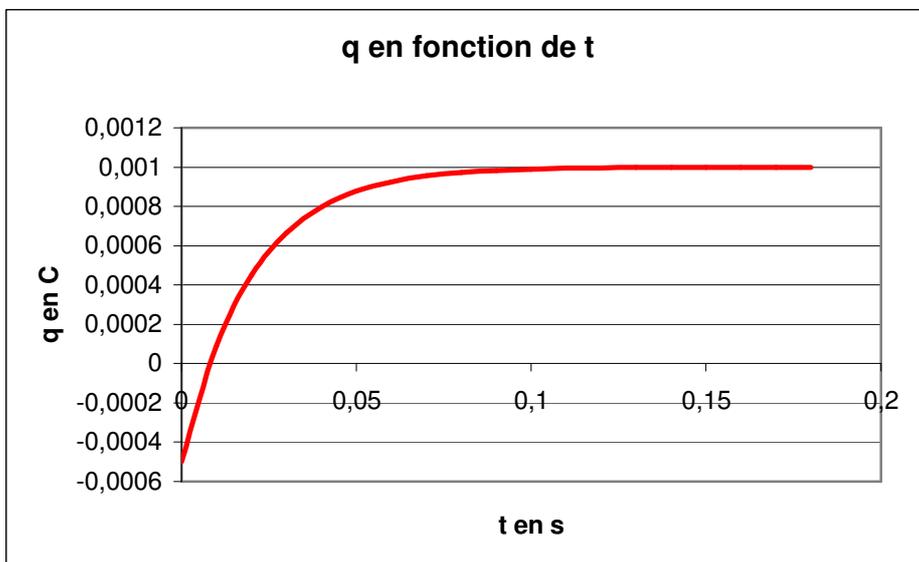
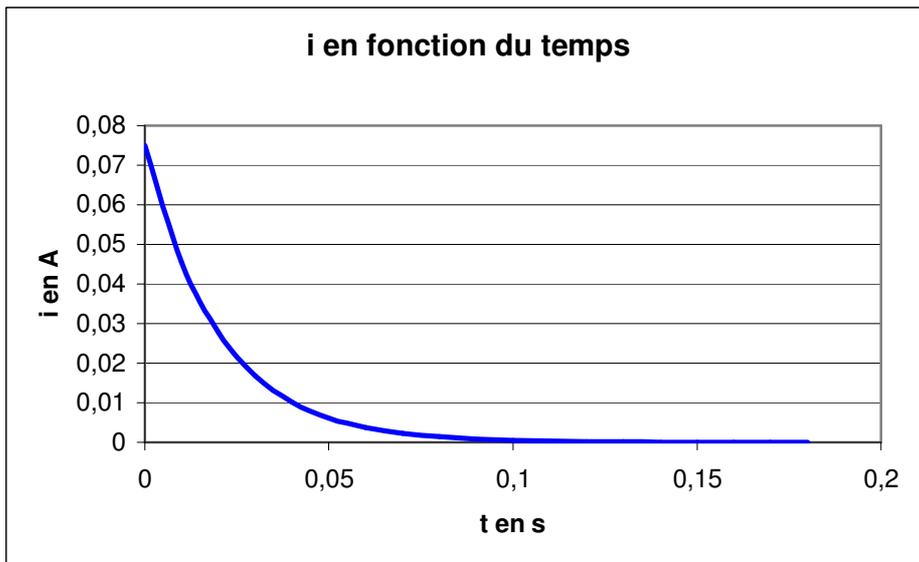
$$u = -75 e^{-50t} + 50$$

$$q = Cu = 20 \times 10^{-6} (-75 e^{-50t} + 50) = -1,5 \times 10^{-3} e^{-50t} + 10^{-3}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = 1,5 \times 10^{-3} \times 50 e^{-50t} = 75 \times 10^{-3} e^{-50t}$$

$$\tau = RC = 0,02 \text{ s} \quad 5\tau = 0,1 \text{ s}$$

On trace les courbes pour $0 \leq t \leq 0,2 \text{ s}$



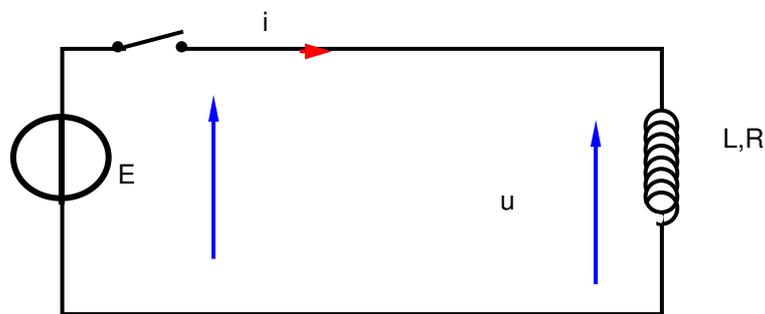
L'intensité i , maximale à $t=0$, diminue et tend vers 0

.CHAPITRE 19 REGIMES TRANSITOIRES - DIPOLE RL

.19.1 REPOSE D'UN DIPOLE RL A UN ECHELON DE TENSION

On alimente une bobine d'inductance L et de résistance R à l'aide d'un générateur fournissant une tension constante E.

.19.1.1 Schéma du montage



.19.1.2 Equation différentielle

$E = \text{constante.}$ $t=0$ on ferme l'interrupteur K : $\forall t \geq 0$ $E = u$

$E = Ri + L \frac{di}{dt}$ Equation différentielle du premier ordre.

.19.1.3 Expression de $i = f(t)$

On sait que $i = A e^{\alpha t} + B$ est solution de cette équation différentielle du premier ordre.

Nous allons déterminer les valeurs des constantes A, B et α .

Pour cela on écrit que l'équation différentielle est vérifiée quand on remplace i par $A e^{\alpha t} + B$

$$E = R(A e^{\alpha t} + B) + L \frac{d(A e^{\alpha t} + B)}{dt}$$

$$E = RA e^{\alpha t} + RB + L \frac{d(A e^{\alpha t})}{dt} = RA e^{\alpha t} + RB + LA \alpha e^{\alpha t}$$

$$E = e^{\alpha t} A(R + L\alpha) + RB$$

Pour que cette équation soit vérifiée $\forall t$, il faut que ;

$$R + L\alpha = 0 \text{ et } E = RB$$

$$B = \frac{E}{R} \quad \alpha = -\frac{R}{L} \text{ d'où } i = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$

.19.1.4 Constante de temps du dipôle RL :

.19.1.4.1 Définition.

On appelle constante de temps du dipôle RL le quotient de l'inductance par la résistance de la bobine.

$$\tau = \frac{L}{R}$$

.19.1.4.2 Dimension

$$u = Ri \Rightarrow [R] = \frac{[U]}{[I]} \quad u = L \frac{di}{dt} \Rightarrow [L] = \frac{[U]}{\left[\frac{I}{T}\right]}$$

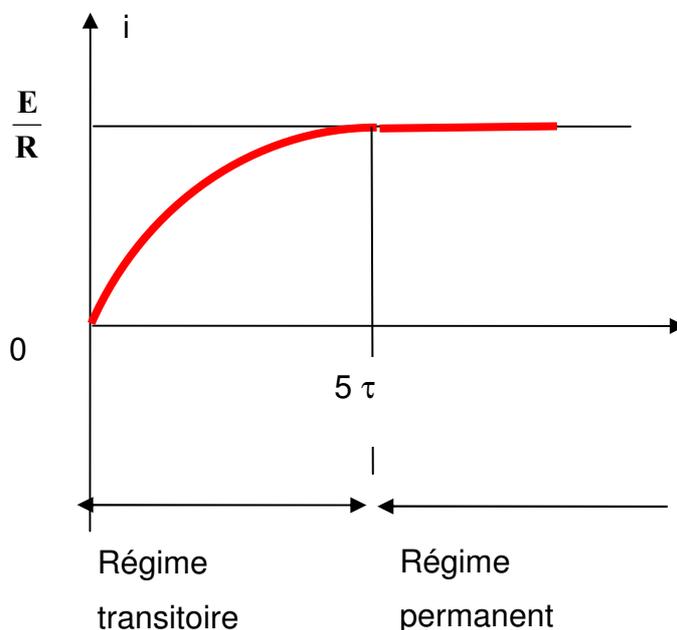
$$\left[\frac{L}{R}\right] = [T]$$

Cette constante a la dimension d'un temps.

.19.1.4.3 Unités

R en Ω L en H τ en s

.19.1.5 Tracé de $i=f(t)$



Mathématiquement l'intensité maximale $\frac{E}{R}$ n'est atteinte qu'au bout d'un temps

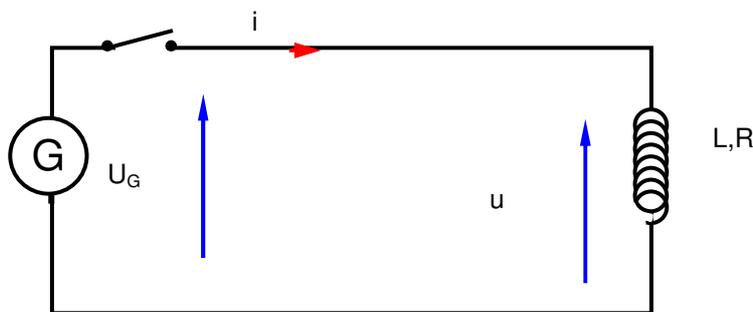
infini ; pratiquement, au bout de 5τ , l'intensité a atteint sa valeur maximale $\frac{E}{R}$

Ensuite, le régime est permanent , i ne varie plus $\frac{di}{dt} = 0$, l'inductance L n'intervient plus, la bobine se comporte alors comme une résistance

.19.2 DIPOLE RL SOUMIS A UNE TENSION EN CRENEAUX

Le générateur fournit une tension périodique de période T en créneaux

.19.2.1 Montage

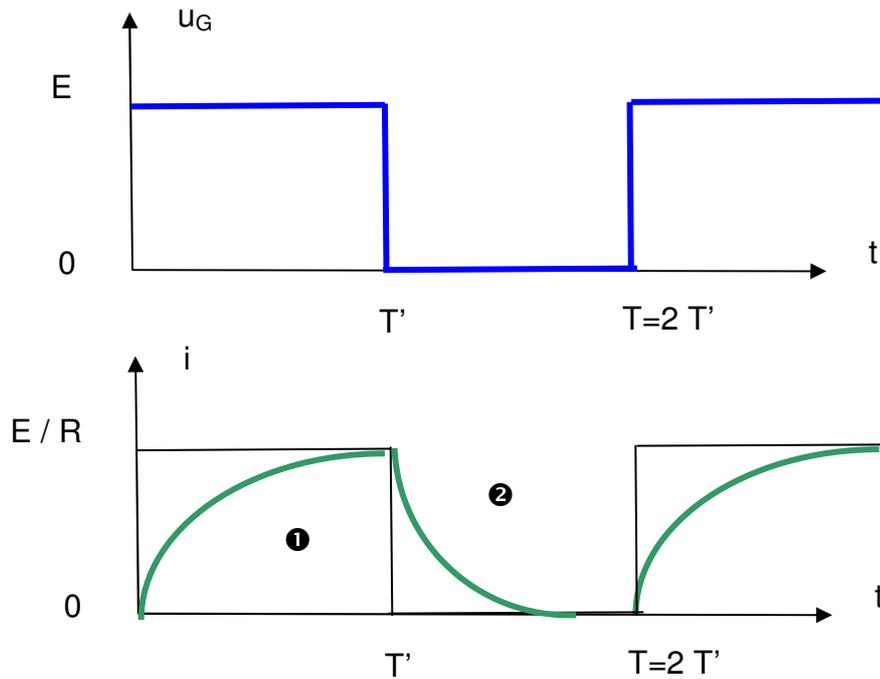


.19.2.2 Etude de $i=f(t)$

.19.2.2.1 Cas où $5\tau < T$

Pendant la première phase $u_G=E$ et la bobine emmagasine de l'énergie.

Comme dans ce cas la valeur de τ est suffisamment petite, i atteint la valeur E/R avant la fin de la phase



Equation de la partie 1 de la courbe $i=f(t)$

$$i = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

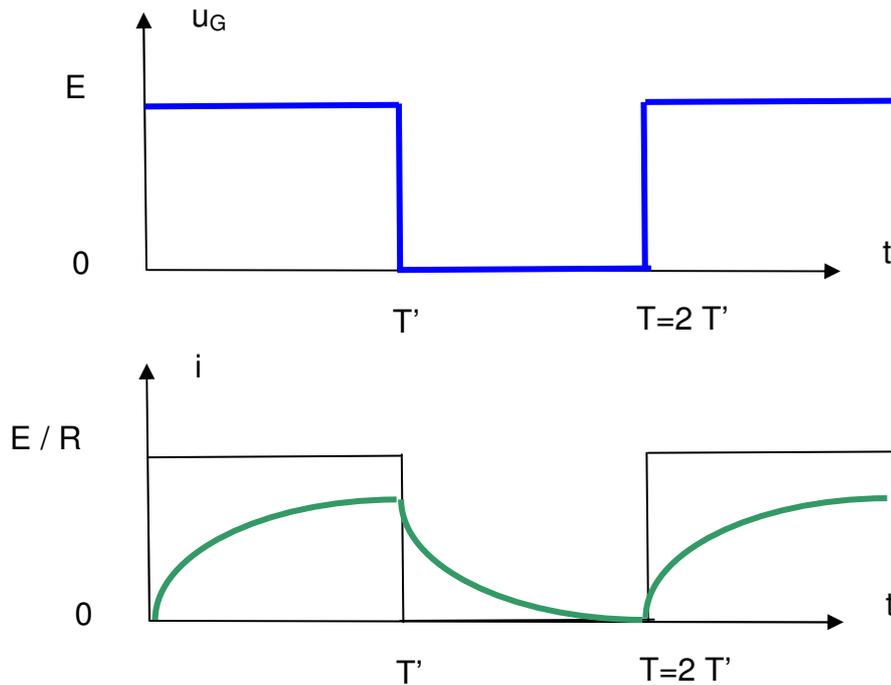
Au cours de la deuxième phase, la tension est nulle aux bornes du générateur mais ce dernier laisse passer le courant électrique et permet au condensateur de se décharger.

Equation de la partie 2 de la courbe $i=f(t)$

$$i = \frac{E}{R} e^{-\frac{(t-T')}{\tau}}$$

.19.2.2.2 Cas où $5\tau > T'$

Dans ce cas l'intensité maximale n'est pas atteinte à la fin de la première phase.



Remarque :

Dans tous les cas l'intensité du courant circulant dans la bobine ne présente pas de discontinuité.

.19.3 EXERCICE

Un circuit RL série avec $R = 50 \Omega$ et $L = 10 \text{ H}$ est alimenté par une tension constante $E = 100 \text{ V}$ à l'instant $t = 0$ où l'interrupteur est fermé.

1. Etablir les expressions, en fonction du temps de i , de u_R et de u_L .
2. Déterminer la valeur de l'intensité du courant i à l'instant $t = 0,5 \text{ s}$ et le temps au bout duquel $u_R = u_L$
3. Tracer les courbes représentatives de u_R et de u_L en fonction du temps.

.19.4 CORRIGE

$$1. E = Ri + L \frac{di}{dt} \quad \Rightarrow \quad i = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$u_R = Ri = E(1 - e^{-\frac{R}{L}t})$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = \frac{LE}{R} \left(\frac{R}{L} \right) e^{-\frac{R}{L}t} = E e^{-\frac{R}{L}t}$$

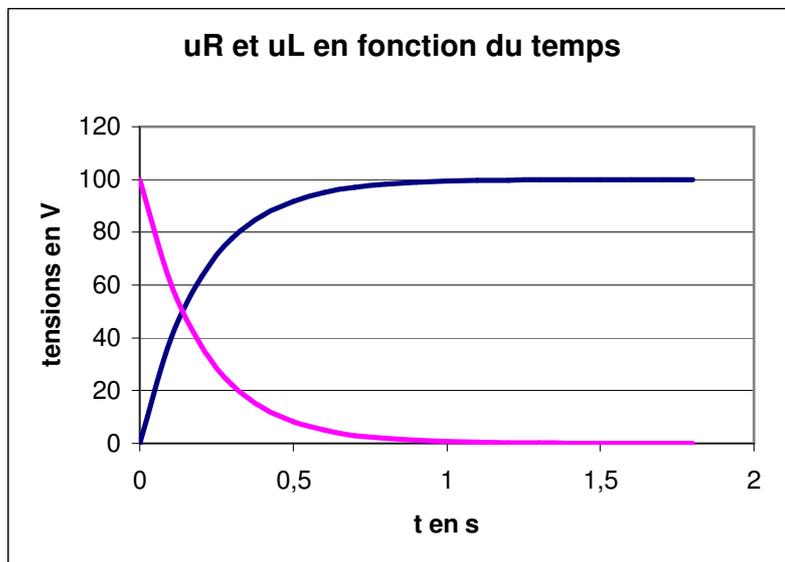
$$2. i = \frac{100}{50} (1 - e^{-\frac{50}{10}0,5}) \quad i = 2(1 - e^{-2,5}) = 1,84 \text{ A}$$

$$u_R = u_L = \frac{E}{2} = 50 \text{ V}$$

$$50 = -100e^{-\frac{50}{10}t} \quad e^{-5t} = -0,5 \quad t = 0,138 \text{ s}$$

$$3. \tau = \frac{L}{R} = 0,2 \text{ s} \quad 5\tau = 1 \text{ s}$$

Il faut faire varier t de 0 à plus de 1s pour observer sur les courbes le régime permanent.

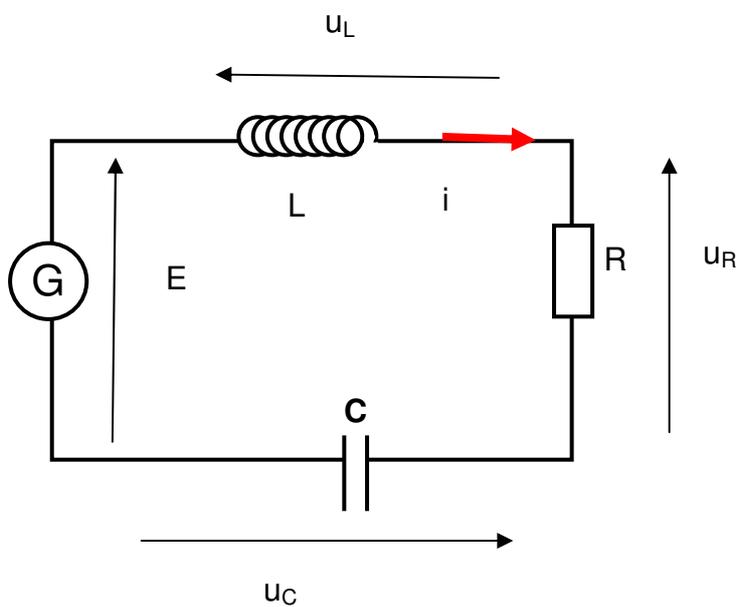


.CHAPITRE 20 ACTIVITE :REGIME TRANSITOIRE - DIPOLE RLC

.20.1 LE PROBLEME.

Que se passe-t-il lorsqu'on relie un dipôle RLC série à une source de tension continue et parfaite ?

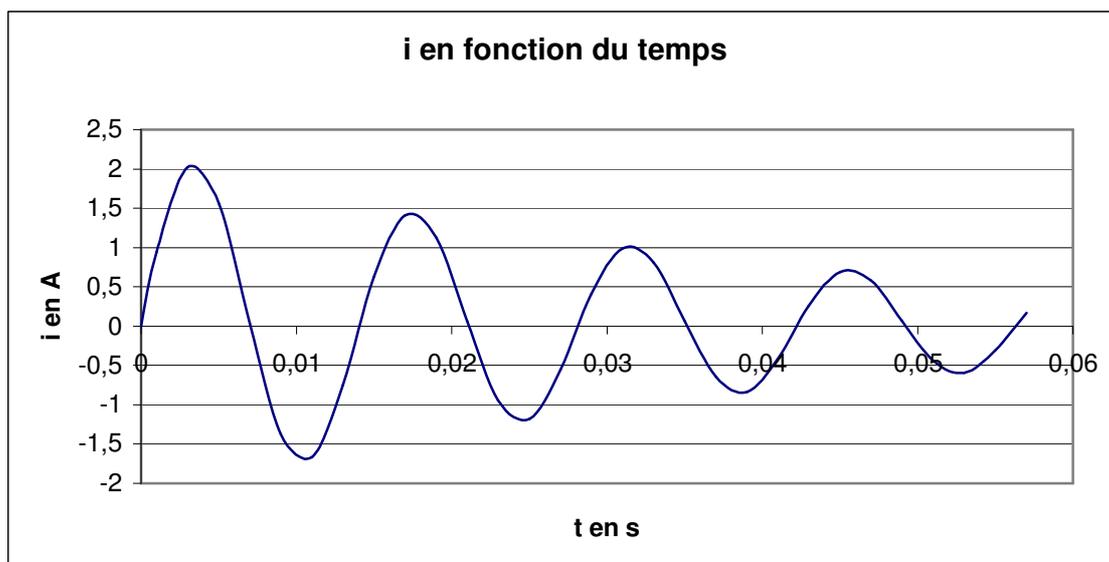
On réalise le montage suivant :



$$E= 100 \text{ V} \quad R= 5 \Omega \quad L= 0,1 \text{ H} \quad C= 50 \mu\text{F}$$

A $t= 0$, on ferme l'interrupteur, le condensateur étant déchargé.

L'ordinateur permet de tracer le graphe de $i=f(t)$:



.20.1.1 Question 1.

On dit que le régime est pseudo-périodique. Pourquoi ?

Déterminer la pseudo-période. Comparer la pseudo-période à la période des oscillations d'un circuit RLC à la résonance.

Réponse :

Les oscillations rappellent les oscillations sinusoïdales mais l'amplitude décroît au cours du temps. Le régime n'est pas périodique mais pseudo-périodique.

La pseudo-période est la durée, mesurée sur l'axe des temps, séparant les abscisses de deux sommets consécutifs de la courbe.

On constate que cette grandeur est constante et vaut 0,014 s

La fréquence de résonance d'un dipôle RLC série est $T = 2\pi\sqrt{LC}$

$$T = 2\pi\sqrt{0,1 \times 50 \times 10^{-6}} = 0,014 \text{ s}$$

La pseudo-période a donc pour expression : $2\pi\sqrt{LC}$

.20.1.2 Question 2

En mécanique, nous avons rencontré des courbes analogues lors des oscillations d'un pendule amorti.

Aux frottements en mécanique, correspond l'effet Joule en électricité.

On peut penser que c'est la résistance qui est la cause de l'amortissement des oscillations. Que se passe-t-il lorsqu'on fait varier R ?

Réponse

L'expérience montre que plus on diminue R plus l'amortissement diminue et plus la courbe ressemble à une sinusoïde.

Lorsqu'on augmente R, les oscillations s'amortissent de plus en plus et le régime oscillatoire disparaît pour faire place à un régime apériodique.

L'étude théorique nous permettra d'y voir plus clair.

.20.2 ETUDE THEORIQUE DU REGIME TRANSITOIRE

.20.2.1 Equation différentielle

A $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad \text{Equation différentielle.}$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$$L \ddot{i} + R \dot{i} + \frac{i}{C} = 0 \quad \text{ou encore} \quad \ddot{i} + \frac{R}{L} \dot{i} + \frac{i}{LC} = 0$$

.20.2.2 Résolution de l'équation

$$\text{si on pose } \lambda = \frac{R}{2L} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad \ddot{i} + 2\lambda \dot{i} + \omega_0^2 i = 0$$

L'équation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$ admet deux racines :

$$r_1 = \frac{-2\lambda + \sqrt{4\lambda^2 - 4\omega_0^2}}{2} \quad r_2 = \frac{-2\lambda - \sqrt{4\lambda^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

$$r_1 = \alpha + \beta \quad r_2 = \alpha - \beta \quad \text{avec } \alpha = -\lambda \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\sqrt{4\lambda^2 - 4\omega_0^2}}{2}$$

.20.2.3 Discussion

Trois cas apparaissent suivant le signe de l'expression sous radical $4\lambda^2 - 4\omega_0^2$

.20.2.3.1 Cas 1 : $4\lambda^2 - 4\omega_0^2 > 0$

On obtient deux racines r_1 et r_2 réelles

$$i = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}$$

Le régime est dit apériodique dans ce cas car on n'observe pas d'oscillations.

i tend vers zéro sans osciller.

.20.2.3.2 Cas 2 : $4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 0$

Les deux racines r_1 et r_2 sont égales et $i = e^{\alpha t}(K_1 + K_2 t)$

Le régime est dit critique dans ce cas ; il n'y a pas d'oscillation, c'est le régime pour lequel l'intensité tend vers 0 le plus rapidement.

.20.2.3.3 Cas 3 : $4\lambda^2 - 4\omega_0^2 < 0$

Les deux racines sont complexes conjuguées

$$i = e^{\alpha t} (K_1 \cos bt + K_2 \sin bt)$$

Le régime est ici pseudo-périodique.

.20.2.4 Interprétation

Comment peut-on expliquer physiquement, l'existence de ces trois cas ?

Si E, L et C sont constants, on peut faire varier R et étudier $i=f(t)$

$$\text{Cas 1 : } 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 > 0 \Rightarrow \lambda > \omega_0 \quad \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\text{Cas 2 : } 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \omega_0 \quad \frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\text{Cas 3 : } 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 < 0 \Rightarrow \lambda < \omega_0 \quad \frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow R_c < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

La valeur $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ est appelée résistance critique.

C'est la valeur de R, comparée à la valeur de la résistance critique, qui permet de déterminer le régime.

.20.3 EXERCICE.

A la date $t=0$, un dipôle RLC est relié à une source de tension $E= 100$ V.

$L= 0,1$ H $C= 50$ μ F. A la date $t=0$, le condensateur est déchargé.

1. Calculer la valeur de la résistance critique R_c

2. $R= 5$ Ω

Etudier le régime transitoire et montrer que i a pour expression :

$$i = e^{-25t}(K_1 \cos 446,5t + K_2 \sin 446,5t) \text{ Déterminer les constantes.}$$

A l'aide d'un tableur-grapheur, tracer la courbe représentative de $i=f(t)$

3. Déterminer l'expression de $i=f(t)$ et tracer la courbe correspondante pour

$R = R_C$ et pour $R = 500 \Omega$

.20.4 CORRIGE.

$$1. R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad R_C = 2\sqrt{\frac{0,1}{50 \times 10^{-6}}} = 89,4 \Omega$$

$$2. \lambda = 25 \quad \omega_0 = 447$$

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad \ddot{i} + \frac{R}{L} \dot{i} + \frac{i}{LC} = 0$$

l'équation caractéristique est $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

$$\lambda = \frac{R}{2L} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont $r_1 = -25 + 446,5j$ et $r_2 = -25 - 446,5j$

$$i = e^{-25t} (K_1 \cos 446,5t + K_2 \sin 446,5t)$$

Détermination des constantes

$$\text{A } t=0, i=0 \quad 0 = e^{-25 \times 0} (K_1 \cos 0 + K_2 \sin 0) = K_1 \quad K_1 = 0$$

$$\text{d'où } i = e^{-25t} (K_2 \sin 446,5t)$$

$$E = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} \quad \text{à } t=0, i=0 \text{ et } q=0$$

$$100 = 0 + 0,1 \frac{di}{dt} + 0 \Rightarrow \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = 1000$$

$$\text{si } i = 2,24 e^{-25t} \sin 446,5t$$

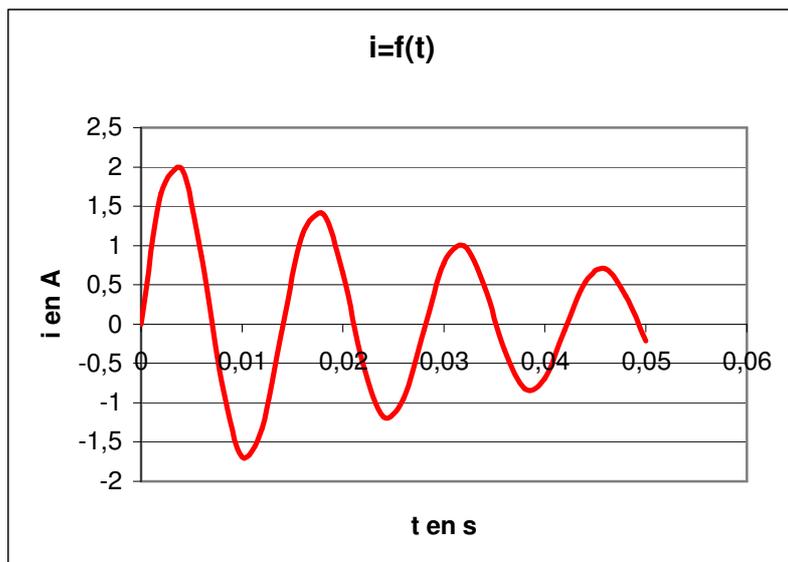
$$\frac{di}{dt} = K_2 (-25e^{-25t} \cos 446,5t - e^{-25t} (446,5) \sin 446,5t)$$

$$\text{A la date } t=0 : 1000 = K_2 (-25e^0 \sin 0 + e^0 (446,5) \cos 0)$$

$$K_2 = \frac{1000}{446,5} = 2,24$$

D'où

$$i = 2,24 e^{-25t} \sin 446,5t$$



3.

$$R = R_C$$

$$\alpha = -\lambda = -\frac{R}{2L} \quad \alpha = -\frac{89,4}{0,2} = -447 \text{ s}^{-1}$$

$$i = e^{-447t} (K_1 + K_2 t)$$

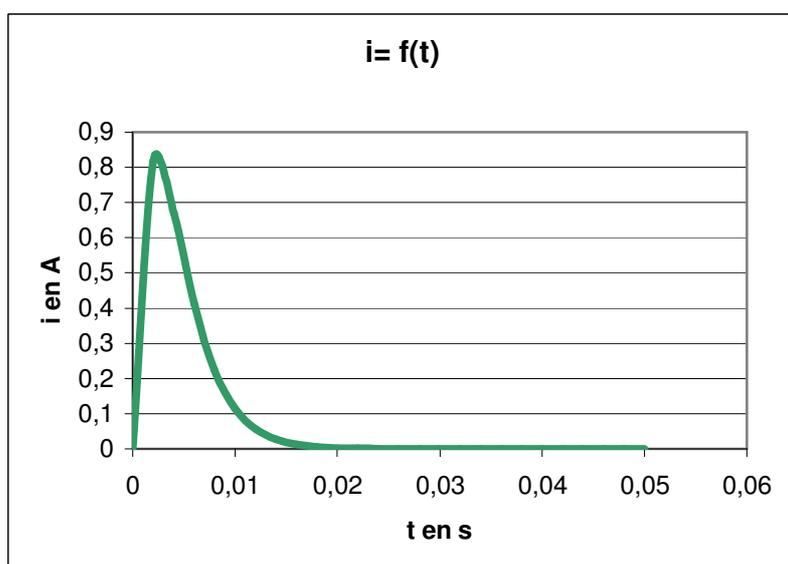
$$\text{à } t=0, i=0 \quad 0 = e^0 (K_1 + K_2 \times 0) \Rightarrow K_1 = 0 \quad \text{d'où } i = K_2 e^{-447t} t$$

$$\frac{di}{dt} = -447 K_2 e^{-447t} t + K_2 e^{-447t}$$

$$\text{à } t=0, \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = 1000$$

$$1000 = -447 K_2 e^0 \times 0 + K_2 e^0 \Rightarrow K_2 = 1000$$

$$i = (1000 e^{-447t}) t$$



4.

$$R = 500 \Omega$$

$$\lambda = \frac{R}{2L} \quad \lambda = \frac{500}{2 \times 0,1} = 2500 \quad \alpha = -2500$$

$$\beta = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2} \quad \beta = \sqrt{2500^2 - 447^2} = 2460$$

$$r_1 = -2500 + 2460 = -40 \quad r_2 = -2500 - 2460 = -4960$$

$$i = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}$$

$$\text{à } t=0, i=0 \quad \text{d'où } 0 = K_1 + K_2$$

$$\frac{di}{dt} = K_1 r_1 e^{r_1 t} + K_2 r_2 e^{r_2 t} \quad 1000 = K_1 r_1 e^0 + K_2 r_2 e^0 \quad \text{car à } t=0, \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0} = 1000$$

On obtient : $K_1 = 0,203$ et $K_2 = -0,203$

$$i = 0,203 e^{-40t} - 0,203 e^{-4960t}$$

